7. Стратегия социально-экономического развития Ямало-Ненецкого автономного округа во взаимосвязи с энергетической стратегией России / РАН. Сибирское Отделение. Институт Геологии и Газа. Институт Экономики и Организации Промышленного производства. – Новосибирск, 2001.

РЕЗЮМЕ

Предложена стратегия повышения социально-экономической устойчивости в эколого-дестабилизированном регионе. Стратегия основана на единстве политической, производственной, социальной и организационно-правовой ее составляющих, каждая из которых имеет свои критерии и аспекты и представляет неотъемлемую часть единого целого.

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2007 г.

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ МАКРОДИНАМИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИК ПЕРЕХОДНОГО ТИПА

*Э.М. **Аксень**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета*

1. Некоторые особенности моделирования экономик переходного типа

В настоящее время наблюдается недостаток экономико-математических моделей, учитывающих особенности экономик переходного типа и предназначенных для нахождения адекватных решений социально-экономических проблем и разработки оптимальных путей экономического развития. Модели, используемые для исследования макроэкономического развития в постсоветских республиках, как правило, не описывают мотивы поведения экономических агентов, не исследуют влияние реальных и воображаемых рисков на решения, принимаемые на микроуровне, вопросы спроса, предложения и равновесия на рынках, не анализируют влияние государственной экономической политики на развитие экономической системы.

По нашему мнению, причиной вышеуказанных недостатков в области экономико-математического моделирования для стран СНГ на макроуровне является слабое использование мощного аппарата экономической теории. Для оправдания недостаточного применения основ экономической теории при построении экономико-математических моделей достаточно широко используется аргумент, состоящий в указании на неприспособленность западной экономической теории к реалиям постсоветских республик.

На наш взгляд, такая аргументация используется некорректно. Действительно, западные модели не приспособлены к условиям постсоветских экономик, и их не следует без соответствующей модификации и адаптации использовать для экономического анализа в наших условиях. Однако при разработке моделей национальных экономик необходимо использование универсального фундамента экономической теории (например, идеи максимизации полезности экономических агентов, теория спроса, предложения, рыночного равновесия).

Отметим, что в западной экономической теории мало внимания уделяется инфляционным опасениям населения, опасениям дефолтов собственного и заемного капитала. Это объясняется тем, что на Западе рыночные отношения установились давно, рыночные институты существуют длительный период времени, и в течение жизни нескольких поколений не было вышеупомянутых дефолтов.

В наших же реалиях сравнительно недавно произошел распад СССР, что привело к падению уровня жизни населения и обесцениванию сбережений. Только в 2000-х гг. наступила стабилизация. Однако у наших людей эти воспоминания живы, и пройдет еще немало времени, прежде чем у населения появится твердая вера в стабильность.

Все это приводит к тому, что у домашних хозяйств в постсоветских республиках существует серьезная тяга к переводу своего “богатства” в зарубежные (в основном западные) финансовые активы (иностранную валюту, зарубежные банковские депозиты и др.), что приводит к оттоку средств из национальных экономик.

Эти моменты не учитываются в западных экономических теориях, и рекомендации западных экспертов касательно макроэкономической политики в странах СНГ давались, как правило, без их учета.

Кроме вышеописанных опасений у домашних хозяйств существуют аналогичные сомнения у потенциальных иностранных инвесторов, что приводит к явно недостаточным иностранным инвестициям в национальные экономики стран СНГ.

2. Основные черты предлагаемой методики моделирования макродинамики для экономик переходного типа

Перечислим основные черты разработанных нами и описанных в настоящей статье подходов к моделированию макродинамики экономики переходного типа:

– использование микроэкономических основ для учета рыночных механизмов (через максимизацию полезности);

– учет производственных и финансовых рисков;

– учет инфляционных опасений населения, а также опасений возможных дефолтов финансовых организаций;

– учет государственной экономической политики (роль государства значительно расширена по сравнению с западными макромоделями);

– возможность отслеживания развития экономической системы в динамике.

Мы предлагаем при построении моделей разделять субъективную и объективную динамику переменных. Под субъективной динамикой мы понимаем ожидаемую экономическими агентами динамику переменных моделей. Субъективная динамика может отличаться от того, что происходит в реальности. Для описания реальной динамики мы используем термин объективная динамика.

Например, в условиях модели полагается, что у домашних хозяйств существуют гиперинфляционные опасения. Однако реальная государственная экономическая политика исключает такую возможность. В модели это означает, что в субъективной динамике, ожидаемой домашними хозяйствами, присутствует возможность гиперинфляции, а в объективной – ее нет.

Отметим, что (в соответствии с теорией информационной асимметрии [5, 7, 9]) у разных экономических агентов разные и ожидания. Для моделирования случайных колебаний переменных как для объективной, так и для субъективной динамики экономической системы мы предлагаем использовать векторный стандартный винеровский процесс (броуновское движение). Такой подход является общепринятым в современной экономической науке [10].

Для моделирования возможных дефолтов уровня цен (т.е. гиперинфляции), собственного и заемного капитала в субъективной динамике экономических агентов мы предлагаем использовать случайные пуассоновские меры [1, 2].

3. Иллюстрация предлагаемой методологии на простом примере

3.1. Краткое описание «простой» модели

Представленная ниже модель служит лишь для иллюстрации методики построения и исследования широкого класса стохастических непрерывно-временных моделей, основанных на принципах максимизации полезности экономическими агентами и на принципах рыночного равновесия. При этом для представленного ниже простейшего случая не ставилась задача адекватного описания особенностей национальных экономик.

Достоинством данной «простой» модели является возможность получения решений в явном (аналитическом) виде.

Для простоты модели предполагается, что единственный фактор производства – основной капитал, экономика закрыта, инфляция отсутствует. Эти упрощающие предположения позволяют найти аналитический вид равновесных решений.

Государственная экономическая политика моделируется как набор функций, зависящих от вектора состояния экономики. В каждый момент времени фирмы и домашние хозяйства максимизируют свою полезность, которая зависит от доходности активов (для фирм) и от конечного потребления (для домашних хозяйств).

Процентная ставка устанавливается в текущий момент времени таким образом, чтобы обеспечить равновесие на рынке заемного капитала. При этом должно выполняться также условие равенства ожидаемых домашними хозяйствами доходности r_E собственного капитала (в национальной экономике) и коэффициента σ_E, описывающего случайные колебания доходности собственного капитала, реальным значениям этих переменных в текущий момент времени.

3.2. Моделирование поведения фирм

Структура собственного капитала фирм

В модели предполагается, что (в момент времени τ) активы фирм состоят из основного капитала $K(\tau)$ и заемного капитала $B_{EA}(\tau)$. Обозначим через $B_{EL}(\tau)$ обязательства (заемные средства) фирм перед домашними хозяйствами и государством. Следовательно, в условиях модели собственный капитал $E(\tau)$ фирм равен: $E(\tau) = K(\tau) + B_{EA}(\tau) - B_{EL}(\tau)$. Обозначим через $B_E(\tau)$ чистый заемный капитал, принадлежащий фирмам-резидентам, т.е. $B_E(\tau) = B_{EA}(\tau) - B_{EL}(\tau)$.

Из записанных выше равенств следует, что

$$E(\tau) = K(\tau) + B_E(\tau). \qquad (1)$$

Стохастическая производственная функция

Обозначим через $Y(\tau)$ кумулятивный (т.е. за период времени $(t,\tau]$) ВВП национальной экономики. В условиях модели предполагается, что для стохастического дифференциала $dY(\tau)$ имеет место представление:

$$dY(\tau) = \mu_Y(\tau)d\tau + \sigma_Y(\tau)dW(\tau), \qquad (2)$$

где: $W(\tau)$ – стандартный винеровский процесс (броуновское движение), а $\mu_Y(\tau)$ и $\sigma_Y(\tau)$ – некоторые случайные процессы, согласованные с процессом $W(\tau)$.

Определения винеровского процесса и стохастического дифференциала приведены, например, в книгах [1, 2].

Представление (2) для динамики ВВП (для стохастических непрерывно-временных моделей) является широко распространенным в современной мировой экономической литературе [10].

<u>Замечание 1</u>. Экономический смысл коэффициентов $\mu_Y(\tau)$ и $\sigma_Y(\tau)$ состоит в следующем. Значение $\mu_Y(\tau)$ – это ожидаемая интенсивность производства ВВП в момент времени τ. Значение $\sigma_Y(\tau)$ описывает случайные отклонения ВВП за «малый» промежуток времени $(\tau, \tau + \Delta\tau]$ от своего ожидаемого значения (равного $\mu_Y(\tau)\Delta\tau$). (Дисперсия этого отклонения равна $[\sigma_Y(\tau)]^2 \Delta\tau$.)

В дальнейшем будем считать, что

$$\mu_Y(\tau) = \gamma K(\tau), \ \sigma_Y(\tau) = \sigma_K K(\tau), \qquad (3)$$

где: $\gamma > 0$ и σ_K – заданные константы.

Допущения (3) используются, например, в [10].

Налоги

Обозначим через $T(\tau)$ (кумулятивные) налоги, выплачиваемые фирмами за период времени $(t,\tau]$. В модели предполагается, что для стохастического дифференциала $dT(\tau)$ имеет место представление:

$$dT(\tau) = \mu_T(\tau)d\tau + \sigma_T(\tau)dW(\tau), \qquad (4)$$

где: $\mu_T(\tau)$ и $\sigma_T(\tau)$ – некоторые случайные процессы, согласованные с винеровским процессом $W(\tau)$.

Отметим, что коэффициенты $\mu_T(\tau)$ и $\sigma_T(\tau)$ зависят от налоговой политики государства. В дальнейшем будем считать, что

$$\mu_T(\tau) = \alpha_T \mu_Y(\tau), \ \sigma_T(\tau) = \alpha_T \sigma_Y(\tau), \qquad (5)$$

где: α_T – экзогенно заданная константа.

Отметим, что в соответствии с равенствами (2), (5) представление (4) можно записать следующим образом:

$$dT(\tau) = \alpha_T dY(\tau). \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует экономический смысл коэффициента α_T. Значение α_T – это налоговая нагрузка на национальную экономику (т.е. отношение ВВП к налоговым сборам).

Динамика активов фирм

Согласно предположениям модели динамика основного капитала $K(\tau)$ описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dK(\tau) = dI_K(\tau) - \delta K(\tau)d\tau, \qquad (7)$$

где: $dI_K(\tau)$ – (стохастический) дифференциал кумулятивных инвестиций в основной капитал, а δ – экзогенно заданная норма амортизации основного капитала.

Динамика заемного капитала $B_E(\tau)$ описывается следующим уравнением:

$$dB_E(\tau) = B_E(\tau)r_B(\tau)dt + dI_{BE}(\tau), \qquad (8)$$

где: $r_B(\tau)$ – процентная ставка, $dI_{BE}(\tau)$ – (стохастический) дифференциал кумулятивных инвестиций фирм в свой чистый заемный капитал (без учета реинвестируемых процентов).

Денежные потоки фирм

Обозначим через $I_E(\tau)$ кумулятивные (т.е. за период времени $(t,\tau]$) инвестиции в собственный капитал фирм (без учета реинвестируемой прибыли). В условиях модели имеет место равенство:

$$dI_K(\tau) + dI_{BE}(\tau) + dT(\tau) = dY(\tau) + dI_E(\tau). \qquad (9)$$

Равенство (9) справедливо в силу того, что суммарные денежные расходы должны равняться суммарным денежным поступлениям.

Динамика собственного капитала фирм

Из равенств (1), (7)–(9) следует, что для стохастического дифференциала собственного капитала фирм имеет место представление:

$$dE(\tau) = dY(\tau) - \delta K(\tau)d\tau + B_E(\tau)r_B(\tau)d\tau - $$
$$- dT(\tau) + dI_E(\tau). \qquad (10)$$

Из равенств (2), (3), (6) и (10) следует, что

$$dE(\tau) = E(\tau)\left[r_E(\tau)d\tau + \sigma_E(\tau)dW(\tau)\right] + dI_E(\tau), \qquad (11)$$

где: $$r_E(\tau) = \frac{\left[(1-\alpha_T)\gamma - \delta\right]K(\tau) + B_E(\tau)r_B(\tau)}{E(\tau)},$$

$$\sigma_E(\tau) = \frac{(1-\alpha_T)K(\tau)\sigma_K}{E(\tau)}. \qquad (12)$$

Отметим, что коэффициент $r_E(t)$ описывает ожидаемую доходность собственного капитала, а $\sigma_E(t)$ – риск (доходности собственного капитала).

Максимизация полезности для фирм

Обозначим через $\Pi_E(\tau)$ кумулятивную чистую прибыль фирм (за период времени $(t,\tau]$). Отметим, что $d\Pi_E(\tau) = dE(\tau) - dI_E(\tau)$.

Определим доходность (собственного капитала) фирм $y_E(t,\tau)$ за промежуток времени $(t,\tau]$ следующим образом: $y_E(t,\tau) = \dfrac{\Pi_E(\tau)}{E(t)}$.

В модели предполагается, что (в каждый момент времени t) фирмы максимизируют ожидаемую полезность доходности собственного капитала:

$$\mathrm{E}_t\left\{u_E\left[y_E(t,T)\right]\right\}, \qquad (13)$$

где: E_t – оператор математического ожидания (в «текущий» момент времени t), $u_E(y_E)$ – функция полезности.

Функция полезности $u_E(y_E)$ может быть, например, экспоненциального вида:

$$u_E(y_E) = 1 - e^{-\rho_E y_E}, \qquad (14)$$

где: ρ_E – положительная константа.

Отметим, что задача максимизации функционала (13) является достаточно сложной задачей оптимального управления.

Мы предлагаем использовать следующую методику решения задачи максимизации ожидаемой полезности доходности собственного капитала.

Прежде всего заметим, что оптимальные случайные процессы $K^*(\tau) \geq 0$ и $B_E^*(\tau)$, зависят от горизонта оценивания $\Delta t = T - t$, т.е. $K^*(\tau) = K^*(\tau,\Delta t)$ и $B_E^*(\tau) = B_E^*(\tau,\Delta t)$. Обозначим через $K^*(t,0)$ и $B_E^*(t,0)$ пределы соответствующих оптимальных процессов в начальный момент времени t при $\Delta t \to 0$, т.е. $K^* = \lim_{\Delta t\to 0} K^*(t,\Delta t)$ и $B_E^* = \lim_{\Delta t\to 0} B_E^*(t,\Delta t)$.

Нами доказано следующее утверждение.

<u>Утверждение 1.</u> Значения $K^*(t,0)$ и $B_E^*(t,0)$ максимизируют по переменным $K \geq 0$ и B_E следующее выражение:

$$u_E'(0)r_E + \frac{1}{2}u_E''(0)\sigma_E^2 \qquad (15)$$

при ограничении:

$$K + B_E = E, \qquad (16)$$

где: коэффициенты r_E и σ_E зависят от переменных $K \geq 0$ и B_E и находятся в соответствии с формулами (12), т.е.

$$r_E = \frac{\left[(1-\alpha_T)\gamma - \delta\right]K + B_E r_B}{E},$$

$$\sigma_E = \frac{(1-\alpha_T)K\sigma_K}{E}. \qquad (17)$$

Доказательство этого утверждения основано на использовании формулы Ито – она приводится, например, в [1, 2].

На основании Утверждения 1 при «малом» горизонте оценивания Δt максимизация полезности фирм сводится к решению задачи максимизации целевой функции (15) по переменным $K \geq 0$ и B_E при ограничении (16).

Аналитическое решение задачи максимизации полезности фирм

С помощью условий первого порядка оптимальное решение задачи (15), (16) несложно найти в явном виде:

$$K^* = \frac{\max\{(1-\alpha_T)\gamma - \delta - r_B,\ 0\}}{\rho_E[(1-\alpha_T)\sigma_K]^2} E,$$

$$B_E^* = E - K^*. \qquad (18)$$

где: $\rho_E = -\frac{u_E''(0)}{u_E'(0)}$. ($\rho_E$ – это коэффициент абсолютной нерасположенности к риску при $y_E = 0$).

Зависимость оптимального решения от параметров

Обозначим через X_E вектор переменных задачи (15), (16), т.е. $X_E = (K, B_E)$. Оптимальный вектор X_E, а также соответствующие значения переменных μ_Y, σ_Y, r_E и σ_E можно рассматривать как функции от переменных E и r_B (как от параметров оптимизационной задачи):

$$X_E = X_E(E, r_B),\ \mu_Y = \mu_Y(E, r_B),$$
$$\sigma_Y = \sigma_Y(E, r_B),\ r_E = r_E(r_B), \qquad (19)$$

3.3. Моделирование поведения домашних хозяйств

Совокупное «богатство» домашних хозяйств

В модели предполагается, что «богатство» (суммарные активы) $H(\tau)$ домашних хозяйств состоит из заемного капитала $B_H(\tau)$ (т.е. банковских депозитов и облигаций) и собственного капитала $E_H(\tau)$ фирм: $H(\tau) = B_H(\tau) + E_H(\tau)$.

Динамика активов домашних хозяйств

Динамика заемного капитала $B_H(\tau)$ домашних хозяйств описывается стохастическим дифференциальным уравнением (аналогичным уравнению (8) для заемного капитала фирм): $dB_H(\tau) = B_H(\tau) r_B(\tau) d\tau + dI_{BH}(\tau)$,

где: $r_B(\tau)$ – процентная ставка, $dI_{BH}(\tau)$ – (стохастический) дифференциал кумулятивных инвестиций домашних хозяйств в свой заемный капитал (без учета реинвестируемых процентов).

Динамика собственного капитала $E_H(\tau)$ фирм-резидентов, принадлежащего домашним хозяйствам, описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dE_H(\tau) = E_H(\tau)[r_E(\tau)d\tau + \sigma_E(\tau)dW(\tau)] + dI_{EH}(\tau),$$

где: $r_E(\tau)$ – ожидаемая доходность собственного капитала, $\sigma_E(\tau)$ – коэффициент риска для доходности собственного капитала, $W(\tau)$ – стандартный винеровский процесс (броуновское блуждание), $dI_{EH}(\tau)$ – (стохастический) дифференциал кумулятивных инвестиций домашних хозяйств в собственный капитал фирм-резидентов (без учета реинвестируемой прибыли).

Замечание 2. Для описания ожидаемых домашними хозяйствами возможных дефолтов заемного и собственного капитала мы предлагаем использовать случайную пуассоновскую меру. С учетом возможных дефолтов заемного и собственного капитала записанные выше уравнения, описывающие субъективную динамику заемного и собственного капитала домашних хозяйств, примут вид:

$$dB_H(\tau) = B_H(\tau)\Big[r_B(\tau)d\tau +,$$
$$+ \int \zeta_{BH}(x)\nu_H(dx, d\tau)\Big] + dI_{BH}(\tau)$$
$$dE_H(\tau) = E_H(\tau)\Big[r_E(\tau)d\tau + \sigma_E(\tau)dW(\tau) +$$
$$+ \int \zeta_{EH}(x)\nu_H(dx, d\tau)\Big] + dI_{EH}(\tau),$$

где: $\zeta_{BH}(x)$ и $\zeta_{EH}(x)$ – относительные изменения (соответственно) заемного и собственного капитала домашних хозяйств в случае, если происходит скачок вида x, $\nu_H(dx, d\tau)$ – случайная пуассоновская мера.

Денежные потоки домашних хозяйств

Обозначим через $C_H(\tau)$ интенсивность конечного потребления домашних хозяйств. Заметим, что в условиях модели денежные доходы домашних хозяйств равны их инвестициям в заемный и собственный капитал, взятым с обратным знаком. Эти доходы идут на приобретение товаров (и услуг) конечного потребления. Следовательно, имеет место равенство: $dI_{BH}(\tau) + dI_{EH}(\tau) + C_H(\tau)d\tau = 0$.

Динамика «богатства» домашних хозяйств

Несложно показать, что в условиях модели для стохастического дифференциала «богатства» домашних хозяйств имеет место представление:

$$dH(\tau) = \mu_H(\tau)d\tau + \sigma_H(\tau)dW(\tau), \qquad (20)$$

где:

$$\mu_H(\tau) = B_H(\tau)r_B(\tau) + E_H(\tau)r_E(\tau) - C_H(\tau), (21)$$

Максимизация полезности для домашних хозяйств

В модели предполагается, что домашние хозяйства максимизируют следующий функционал (межвременной полезности):

$$\mathrm{E}_t\left\{\int_t^T e^{-\theta_H\cdot(\tau-t)}u_H\left[C_H(\tau)\right]d\tau + e^{-\theta_H\cdot(T-t)}V_H\left[H(T)\right]\right\}, (22)$$

где: E_t – оператор математического ожидания (в «текущий» момент времени t), $u_H\left(C_H\right)$ – функция полезности, θ_H– норма межвременных предпочтений, $V_H\left(H\right)$ – функция оценки терминального (конечного) состояния домашних хозяйств.

Идея, состоящая в том, что домашние хозяйства максимизируют функционал межвременной полезности вида (22), широко используется в современной экономической теории (см., например, [6, 8, 10]).

Функция полезности $u_H\left(C_H\right)$ может быть, например, степенной (Кобба-Дугласа):

$$u_H\left(C_H\right) = C_H^{\rho_H}, \qquad (23)$$

где: $\rho_H \in (0,1)$ – заданная константа.

В качестве функции $V_H\left(H\right)$ оценки терминального состояния домашних хозяйств может выступать также степенная функция вида:

$$V_H(H) = aH^{\rho_H}, \qquad (24)$$

где: a – заданная положительная константа.

Задача максимизации функционала (22) (подобно соответствующей задаче для фирм, изложенной в предыдущем пункте) является сложной задачей стохастического оптимального управления.

Предлагаемая методика решения задачи максимизации межвременной полезности для домашних хозяйств аналогична соответствующей методике для фирм.

Оптимальные случайные процессы $C_H^*(\tau)$, $B_H^*(\tau)$ и $E_H^*(\tau)$ зависят от горизонта оценивания $\Delta t = T - t$, т.е. $C_H^*(\tau) = C_H^*(\tau,\Delta t)$, $B_H^*(\tau) = B_H^*(\tau,\Delta t)$, $E_H^*(\tau) = E_H^*(\tau,\Delta t)$.

Обозначим через $C_H^*(t,0)$, $B_H^*(t,0)$ и $E_H^*(t,0)$ пределы соответствующих оптимальных процессов в начальный момент времени t при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$C_H^*(t,0) = \lim_{\Delta t\to 0} C_H^*(t,\Delta t),$$

$$B_H^*(t,0) = \lim_{\Delta t\to 0} B_H^*(t,\Delta t)$$

и

$$E_H^*(t,0) = \lim_{\Delta t\to 0} E_H^*(t,\Delta t).$$

<u>Утверждение 2.</u> Значения $C_H^*(t,0)$, $B_H^*(t,0)$ и $E_H^*(t,0)$ максимизируют по переменным $C_H \ge 0$, B_H и $E_H \ge 0$ следующее выражение:

$$u_H(C_H) + V_H'(H)\mu_H + \frac{1}{2}V_H''(H)\sigma_H^2, \qquad (25)$$

при ограничении:

$$B_H + E_H = H, \qquad (26)$$

где: коэффициенты μ_H и σ_H зависят от перечисленных выше переменных и находятся в соответствии с формулами (21), т.е.

$$\mu_H = B_H r_B + E_H r_E - C_H, \qquad (27)$$

Доказательство Утверждения 2 основано на использовании формулы Ито.

При «малом» горизонте оценивания Δt максимизация полезности домашних хозяйств сводится к решению задачи максимизации целевой функции (25) по переменным $C_H \ge 0$, B_H и $E_H \ge 0$ при ограничении (26).

Аналитическое решение задачи максимизации полезности для домашних хозяйств

С помощью условий первого порядка оптимальное решение задачи максимизации выражения (25) при ограничении (26) несложно найти в явном виде.

В случае, когда функция полезности $u_H\left(C_H\right)$ задана формулой (23), а функция $V_H\left(H\right)$ оценки терминального состояния – формулой (24), оптимальное решение задачи (25), (26) – следующее:

$$C_H^* = a^{-\frac{1}{1-\rho_H}}H, \quad E_H^* = \frac{\max\left\{r_E - r_B,\ 0\right\}}{(1-\rho_H)\sigma_E^2}H,$$

$$B_H^* = H - E_H^*. \qquad (28)$$

Зависимость оптимального решения от параметров

Обозначим через X_H вектор переменных задачи (25), (26): $X_H = (C_H, B_H, E_H)$. Оптимальный вектор X_H можно рассматривать как (векторную) функцию от переменных H, r_B, r_E и σ_E(как от параметров задачи оптимизации):

$$X_H = X_H\left(H, r_B, r_E, \sigma_E\right). \qquad (29)$$

3.4. Моделирование государственной экономической политики

Государственные активы

Под государственными активами в модели понимаются активы, находящиеся в собственности органов государственного управления и кредитно-денежного регулирования (в том числе фирмы государственной формы собственности).

В условиях модели предполагается, что в (каждый) момент времени t (суммарные) государственные активы $G(t)$ состоят из золотовалютного резерва $GL(t)$, заемного капитала B_G и собственного капитала $E_G(t)$ фирм:

$$G(t) = GL(t) + B_G(t) + E_G(t). \quad (30)$$

Налоговые поступления в бюджет

Согласно предположениям модели для стохастического дифференциала $dT(t)$ кумулятивных налоговых поступлений в бюджет имеет место представление (4) $dT(t) = \mu_T(t)dt + \sigma_T(t)dW(t)$, где: $\mu_T(t)$ и $\sigma_T(t)$ – некоторые случайные процессы, согласованные с винеровским процессом $W(t)$.

Государственные расходы

Обозначим через $GS(t)$ кумулятивные государственные расходы (за промежуток времени $(t_0, t]$). Согласно предположениям модели имеет место представление: $dGS(t) = \mu_{GS}(t)dt + \sigma_{GS}(t)dW(t)$, где: $\mu_{GS}(t)$ и $\sigma_{GS}(t)$ – некоторые случайные процессы, согласованные с винеровским процессом $W(t)$.

Взаимосвязь между денежными потоками государства

В условиях модели справедливо равенство:

$$dI_{GL}(t) + dI_{BG}(t) + dI_{EG}(t) + dGS(t) = dT(t), (31)$$

где: $I_{GL}(t)$, $I_{BG}(t)$, $I_{EG}(t)$ – кумулятивные инвестиции в государства в золотовалютный резерв, заемный капитал и собственный капитал фирм.

Равенство (31) выполняется в силу того, что (денежные) притоки должны равняться (денежным) оттокам.

Вектор состояния экономики

Определим вектор X_G, состоящий из государственных активов и коэффициентов динамики налоговых поступлений и государственных расходов (см. выше):

$$X_G = (GL, B_G, E_G, \mu_T, \sigma_T, \mu_{GS}, \sigma_{GS}). \quad (32)$$

Определим вектор S состояния экономики (в некоторый момент времени) следующим образом:

$$S = (X_E, X_H, X_G, \mu_Y, \sigma_Y, r_B, r_E, \sigma_E), \quad (33)$$

где: $X_E = (K, B_E)$ – вектор активов фирм, $X_H = (C_H, B_H, E_H)$ – вектор, состоящий из конечного потребления и активов домашних хозяйств, X_G – вектор государственных активов и потоков, μ_Y и σ_Y – коэффициенты динамики ВВП (см. представление (2)), r_B – процентная ставка; r_E – ожидаемая доходность собственного капитала в национальной экономике; σ_E – векторный коэффициент, описывающий случайные колебания доходности собственного капитала.

Экономическая политика по отношению к государственным активам

Государственная экономическая политика правительства в отношении государственных активов моделируется как набор (экзогенно заданных) функций, описывающих зависимость государственных активов от вектора S реального состояния экономики, т.е.

$$GL = GL(S),\ B_G = B_G(S),\ E_G = E_G(S). (34)$$

При этом (в соответствии с равенством (30)) при любом векторе S функции (34) должны удовлетворять условию: $GL(S) + B_G(S) + E_G(S) = G(S)$,

где: значение $G(S)$ определяется естественным образом с помощью соответствующих компонент вектора X_G, входящего в состав вектора (т.е. $G(S) = GL + B_G + E_G$).

Функции (34), например, могут иметь вид:

$$GL(S)=\alpha_{GL}G(S), \quad B_G(S)=\alpha_B G(S),$$

$$E_G(S)=\alpha_E G(S), \qquad (35)$$

где: α_{GL}, α_B, α_E – константы, сумма которых равна единице.

Налоговая политика

Напомним, что $\mu_T(t)$ и $\sigma_T(t)$ – коэффициенты динамики налоговых поступлений (см. выше). В условиях модели государственная налоговая политика описывается функциями:

$$\mu_T=\mu_T(S),\ \sigma_T=\sigma_T(S), \qquad (36)$$

где: S – вектор состояния экономики (см. формулу (33)).

Функции $\mu_T(S)$ и $\sigma_T(S)$, например, могут иметь вид:

$$\mu_T(S)=\alpha_T\mu_Y, \qquad \sigma_T(S)=\alpha_T\sigma_Y, \qquad (37)$$

где: α_T – заданная константа, μ_Y и σ_Y – коэффициенты динамики ВВП (см. представление (2)), входящие в состав вектора S.

Бюджетная политика

Напомним, что $\mu_{GS}(t)$ и $\sigma_{GS}(t)$– коэффициенты динамики государственных расходов (см. выше). В условиях модели бюджетная политика государства описывается функциями:

$$\mu_{GS}=\mu_{GS}(S),\ \sigma_{GS}=\sigma_{GS}(S). \ (38)$$

Функции $\mu_{GS}(S)$ и $\sigma_{GS}(S)$, например, могут иметь вид:

$$\mu_{GS}(S)=\alpha_{GS}\mu_T,\ \sigma_{GS}(S)=\alpha_{GS}\sigma_T, (39)$$

где: α_{GS} – заданная константа, μ_T и σ_T – коэффициенты динамики налоговых поступлений (см. выше), входящие в состав вектора S.

Векторная функция экономической политики государства

В соответствии с вышеизложенным материалом экономическая политика государства описывается функциями (34), (36), (38). В соответствии с обозначением (32) для вектора X_G государственных активов и потоков функции (34), (36), (38) можно записать в векторном виде, т.е.

$$X_G=X_G(S), \qquad (40)$$

где: S – вектор состояния экономики.

3.5. Моделирование равновесного состояния экономической системы

Определение равновесного вектора состояния экономики

Отметим, что значения E, H и G собственного капитала фирм, «богатства» домашних хозяйств и суммарных государственных активов не входят в качестве компонент в состав вектора S состояния экономики. Однако эти значения естественным образом определяются с помощью векторов $X_E=(K,B_E)$, $X_H=(C_H,B_H,E_H)$ и $X_G=(GL,B_G,E_G,\mu_T,\sigma_T,\mu_{GS},\sigma_{GS})$, входящих в состав вектора S, т.е. $E=K+B_E$, $H=B_H+E_H$, $G=GL+B_G+E_G$.

Определение 1. Вектор S состояния экономики называется равновесным, если для него выполняются следующие условия:

1) условия неотрицательности для некоторых компонент вектора S: $K\geq 0$, $C_H\geq 0$, $E_H\geq 0$, $GL\geq 0$, $E_G\geq 0$;

2) условия оптимального поведения фирм: $X_E(E,r_B)=X_E$, где в левой части равенства – векторное значение функции, описывающей оптимальное поведение фирм-резидентов (формулы (19)), при $E=K+B_E$ (где: K и B_E – компоненты вектора S) и при значении r_B, взятом из вектора , а в правой части – вектор , входящий в состав заданного вектора S;

3) условия согласованности значений некоторых переменных с оптимальным поведением фирм: $\mu_Y(E,r_B)=\mu_Y$, $\sigma_Y(E,r_B)=\sigma_Y$, $r_E(E,r_B)=r_E, \sigma_E(E,r_B)=\sigma_E$, где: в левых частях равенств – значения коэффициентов динамики ВВП, ожидаемой доходности собственного капитала и коэффициента, описывающего случайные колебания собственного капитала, соответствующие оптимальному поведению фирм (формулы (19)) при $E=K+B_E$ (где: K и B_E – компоненты вектора S) и при значении r_B, взятом из вектора , а в правых частях – значения компонент вектора);

4) условия оптимального поведения домашних хозяйств: $X_H(H,r_B,r_E,\sigma_E)=X_H$, где: в левой части равенства – векторное значение функции, описывающей оптимальное

Труды Минского института управления. 2008. №1

поведение домашних хозяйств (формула (29)), при $H = B_H + E_H$ (где: B_H и E_H – компоненты вектора S), а в правой части – вектор X_H, входящий в состав заданного вектора);

5) условия согласованности с государственной экономической политикой: $X_G(S) = X_G$, где в левой части равенства – векторное значение функции, описывающей государственную экономическую политику (формула (40)), при заданном векторе S, а в правой части – вектор X_G, входящий в состав заданного вектора S;

6) условие равновесия на рынке собственного капитала: $E_H + E_G = E$, где: в левой части равенства – значения компонент вектора S, а в правой – значение E, соответствующее вектору X_E (входящему в состав вектора), т.е. $E = K + B_E$;

7) условие равновесия на рынке заемного капитала: $B_E + B_H + B_G = 0$, где: в левой части равенств – компоненты вектора S.

Нахождение равновесного вектора состояния экономики при заданных значениях богатства домашних хозяйств и суммарных активов государства

Нами доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. Равновесный вектор S состояния экономики однозначно определяется значениями H и G, т.е. $S = S(H,G)$.

Замечание 3. В случае, когда векторная функция $X_G(S)$, описывающая государственную экономическую политику, имеет (более простой) вид: $X_G(G,S_{\setminus G})$, где: $S_{\setminus G}$ – вектор реального состояния экономики без вектора X_G государственных активов и потоков, т.е. $S_{\setminus G} = (X_E, X_H, \mu_Y, \sigma_Y, r_B, r_E, \sigma_E)$, нахождение равновесного состояния сводится к решению системы следующих 4 уравнений:

$$E_H(E,r_B) + E_G(G,S_{\setminus G}) = E,$$

$$B_E(E,r_B) + B_H(H,r_B,r_E,\sigma_E) + B_G(G,S_{\setminus G}) = 0, \quad (41)$$

$$r_E(E,r_B) = r_E,\ \sigma_E(E,r_B) = \sigma_E \quad (42)$$

относительно 4 неизвестных: E, r_B, r_E, σ_E.

Аналитическое решение для равновесного состояния

В случае, когда государственная экономическая политика описывается функциями вида (35), (37), (39), несложно заметить, что экономическая политика правительства описывается векторной функцией вида $X_G(G,S_{\setminus G})$ и, следовательно, в соответствии с замечанием 3 равновесные значения переменных E, r_B, r_E, σ_E определяются из системы уравнений (41), (42).

Для случая, когда государственная экономическая политика описывается функциями вида (35), (37), (39), а функции $u_H(C_H)$ и $V_H(H)$ полезности и оценки терминального состояния домашних хозяйств заданы формулами (23) и (24), нами получено аналитическое решение системы уравнений (41), (42):

$$E = \frac{\rho_E}{1-\rho_H} H + \alpha_E G, \quad (43)$$

$$r_B = (1-\alpha_T)\gamma - \delta - \frac{H + (\alpha_B + \alpha_E)G}{\rho_E H + (1-\rho_H)\alpha_E G}(1-\rho_H)\rho_E\left[(1-\alpha_T)\sigma_K\right]^2, \quad (44)$$

$$r_E = \frac{\left[(1-\alpha_T)\gamma - \delta - r_B\right]^2}{\rho_E\left[(1-\alpha_T)\sigma_K\right]^2} + r_B,$$

$$\sigma_E = \frac{H + (\alpha_B + \alpha_E)G}{\rho_E H + (1-\rho_H)\alpha_E G}(1-\rho_H)(1-\alpha_T)\sigma_K. \quad (45)$$

3.6. Моделирование динамики экономической системы

Допущения относительно объективной динамики экономической системы

Согласно Утверждению 3 вектор S состояния экономики однозначным образом определяется значениями H и G богатства домашних хозяйств и государства. Следовательно, исследование динамики экономической системы сводится к исследованию динамики переменных H и G.

Согласно предположениям модели объективная динамика нижеследующих переменных модели описывается стохастическими дифференциальными уравнениями: для (кумулятивного) ВВП:

$dY(t) = \gamma K(t)dt + \sigma_K K(t)dW(t)$, где: $\gamma > 0$ и σ_K – заданные константы; для основного капитала: $dK(t) = dI_K(t) - \delta K(t)dt$, где: $dI_K(t)$ – (стохастический) дифференциал кумулятивных инвестиций в основной капитал, δ – экзогенно заданная норма амортизации основного капитала; для заемного капитала фирм-резидентов, домашних хозяйств и государства: $dB_E(t) = B_E(t)r_B(t)dt + dI_{BE}(t)$, $dB_H(t) = B_H(t)r_B(t)dt + dI_{BH}(t)$, $dB_G(t) = B_G(t)r_B(t)dt + dI_{BG}(t)$, где: $r_B(t)$ – процентная ставка, $dI_{BE}(t)$, $dI_{BH}(t)$ и $dI_{BG}(t)$ – (стохастические) дифференциалы кумулятивных инвестиций фирм-резидентов, домашних хозяйств и государства в свой чистый заемный капитал (без учета реинвестируемых процентов); для золотовалютного государственного резерва: $dGL(t) = dI_{GL}(t)$, где: $dI_{GL}(t)$ – (стохастический) дифференциал кумулятивных инвестиций в государственный золотовалютный резерв.

Динамика собственного капитала фирм

В соответствии с формулой (11) для стохастического дифференциала собственного капитала фирм имеет место представление:

$$dE(t) = E(t)\left[r_E(t)dt + \sigma_E(t)dW(t)\right] + dI_E(t), \qquad (46)$$

где:

$$r_E(t) = \frac{\mu_Y(t) - \delta K(t) + B_E(t)r_B(t) - \mu_T(t)}{E(t)},$$

$$\sigma_E(t) = \frac{\sigma_Y(t) - \sigma_T(t)}{E(t)}.$$

Напомним, что $E_H(t)$ и $E_G(t)$ – собственный капитал фирм, принадлежащий, соответственно, домашним хозяйствам и государству. В условиях модели можно показать, что

$$dE_H(t) = E_H(t)\left[r_E(t)dt + \sigma_E(t)dW(t)\right] + dI_{EH}(t), \qquad (47)$$

$$dE_G(t) = E_G(t)\left[r_E(t)dt + \sigma_E(t)dW(t)\right] + dI_{EG}(t), \qquad (48)$$

где: $dI_{EH}(t)$ и $dI_{EG}(t)$ – стохастические дифференциалы кумулятивных инвестиций (без учета реинвестируемой прибыли) домашних хозяйств и государства в собственный капитал фирм-резидентов.

Динамика «богатства» домашних хозяйств

В соответствии с формулой (20) для стохастического дифференциала «богатства» домашних хозяйств имеет место представление:

$$dH(t) = \mu_H(t)dt + \sigma_H(t)dW(t), \qquad (49)$$

где:

$$\mu_H(t) = B_H(t)r_B(t) + E_H(t)r_E(t) - C_H(t),$$

$$\sigma_H(t) = E_H(t)\sigma_E(t).$$

В силу Утверждения 3 случайные процессы $\mu_H(t)$ и $\sigma_H(t)$ допускают представления:

$$\mu_H(t) = \mu_H\left[H(t), G(t)\right],$$

$$\sigma_H(t) = \sigma_H\left[H(t), G(t)\right]. \qquad (50)$$

Можно показать, что в случае, когда государственная экономическая политика описывается функциями вида (35), (37), (39), функция полезности $u_H\left(C_H\right)$ задана формулой (23), а функция $V_H\left(H\right)$ оценки терминального состояния – формулой (24), для функций $\mu_H(H,G)$ и $\sigma_H(H,G)$ в силу равенств (28), (43)–(45) имеют место формулы:

$$\mu_H(H,G) = \left\{\left(1 - \frac{\rho_E}{1-\rho_H}\right)r_B + \frac{\rho_E}{1-\rho_H}r_E - a^{-\frac{1}{1-\rho_H}}\right\}H,$$

$$\sigma_H(H,G) = \frac{\rho_E\sigma_E}{1-\rho_H}H, \qquad (51)$$

где: значения r_B и r_E определяются по формулам (44), (45).

Динамика суммарных государственных активов

Можно показать, что в условиях модели для стохастического дифференциала суммарных государственных активов имеет место представление:

$$dG(t) = \mu_G(t)dt + \sigma_G(t)dW(t), \qquad (52)$$

где:

$$\mu_G(t) = \mu_T(t) - \mu_{GS}(t) + B_G(t)r_B(t) + E_G(t)r_E(t)$$

$$\sigma_G(t) = \sigma_T(t) - \sigma_{GS}(t) + E_G(t)\sigma_E(t).$$

В силу Утверждения 3 случайные процессы $\mu_G(t)$ и $\sigma_G(t)$ допускают представления:

$$\mu_G(t) = \mu_G\left[H(t), G(t)\right],$$

$$\sigma_G(t) = \sigma_G\left[H(t), G(t)\right]. \qquad (53)$$

Можно показать, что в случае, когда государственная экономическая политика описывается функциями вида (35), (37), (39), функция полезности $u_H\left(C_H\right)$ задана формулой (23), а функция $V_H\left(H\right)$ оценки терминального состояния – формулой (24), для функций

$\mu_G(H,G)$ и $\sigma_G(H,G)$ в силу равенств (43)–(45) имеют место формулы:

$$\mu_G(H,G) = (1-\alpha_{GS})\alpha_T\gamma\left[H + (\alpha_B + \alpha_E)G\right] +$$

$$+\left[\alpha_B r_B + \alpha_E r_E\right]G\ , \qquad (54)$$

$$\sigma_G(H,G) = (1-\alpha_{GS})\alpha_T\sigma_K$$

$$\left[H + (\alpha_B + \alpha_E)G\right] + \alpha_E\sigma_E G. \qquad (55)$$

где: значения r_B и r_E определяются по формулам (44), (45).

Система стохастических дифференциальных уравнений для описания динамики экономической системы

Подставим формулы (50) и (53) в равенства (49) и (52):

$$dH(t) = \mu_H\left[H(t),G(t)\right]dt +$$

$$+\sigma_H\left[H(t),G(t)\right]dW(t), \qquad (56)$$

$$dG(t) = \mu_G\left[H(t),G(t)\right]dt +$$

$$+\sigma_G\left[H(t),G(t)\right]dW(t). \qquad (57)$$

Система стохастических дифференциальных уравнений (56), (57) определяет динамику переменных $H(t)$ и $G(t)$ (богатства домашних хозяйств и государства), т.е. существуют и единственные случайные процессы $H(t)$ и $G(t)$, удовлетворяющие этим уравнениям.

Напомним, что согласно Утверждению 3 значения $H(t)$ и $G(t)$ однозначным образом определяют вектор $S(t)$ состояния экономики. Следовательно, система уравнений (56), (57) определяет не только динамику переменных $H(t)$ и $G(t)$, но и вектора $S(t)$ состояния экономики.

Численное моделирование динамики экономической системы

Алгоритм численного решения системы уравнений (56), (57) может быть основан на идее, состоящей в приближении этой системы стохастических дифференциальных уравнений разностными (см. [1, 2]). При этом винеровский процесс $W(t)$ аппроксимируется биномиальным процессом.

Для аппроксимации уравнений (56), (57) можно использовать, например, следующие разностные уравнения:

$$H(t_{k+1}) = H(t_k) + \mu_H\left[H(t_k),G(t_k)\right]\Delta t +$$

$$\sigma_H\left[H(t_k),G(t_k)\right]\xi_k\sqrt{\Delta t}\,, \qquad (58)$$

$$G(t_{k+1}) = G(t_k) + \mu_G\left[H(t_k),G(t_k)\right]\Delta t +$$

$$+\sigma_G\left[H(t_k),G(t_k)\right]\xi_k\sqrt{\Delta t}\,. \qquad (59)$$

Здесь Δt – длина интервалов разбиения временной оси, т.е. $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, а ξ_k – независимые случайные величины, которые принимают значения –1 и 1 с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$.

Для численного решения системы уравнений (58), (59) может быть использовано имитационное моделирование (метод Монте-Карло) (см., например, [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман, Н.Н. Стохастические дифференциальные уравнения / Н.Н. Гихман, А.В. Скороход. – Киев: Наукова думка, 1968. – 353 с.
2. Пугачев, В.С. Теория стохастических систем / В.С. Пугачев, И.Н. Синицын. – М.: Логос, 2000. – 1000 с.
3. Руденков, В.М. Развитие экономики Беларуси: модель и проблемы / В.М. Руденков // Белорусский журнал международного права и международных отношений. – 2003. – №1. – С. 76–79.
4. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.
5. Akerlof, G.A. Rational Models of Irrational Behavior / G.A. Akerlof, J.L. Yellen // American Economic Review. – 1987. – Vol. 77(2). – С. 137–42.
6. Blanchard, O.J. Lectures on Macroeconomics / O.J. Blanchard, S. Fischer. – MIT Press, 1989. – 650 с.

7. Greenwald, B.C. Asymmetric Information and the New Theory of the Firm: Financial Constraints and Risk Behavior / B.C. Greenwald, J.E. Stiglitz // American Economic Review. – 1990. – Vol. 80(2). – C. 160–65.
8. Obstfeld, M. Foundation of International Macroeconomics / M. Obstfeld, K. Rogoff. – MIT Press, 1996. – 804 c.
9. Stiglitz, J.E. Asymmetric Information in Credit Markets and Its Implications for Macro-economics / J.E. Stiglitz, A. Weiss // Oxford Economic Papers. – 1992. – Vol. 44(4). – C. 694–724.
10. Turnovsky, S.J. Methods of Macroeconomic Dynamics / S.J. Turnovsky. – MIT Press, 2000. – 687 c.

РЕЗЮМЕ

В статье описаны подходы, разработанные нами для моделирования макродинамики экономик переходного типа и позволяющие учитывать финансовые риски и гиперинфляционные опасения. Предлагаемая методика позволяет строить стохастические модели для исследования влияния государственной экономической политики на динамику макроэкономических показателей. Представленные в статье подходы могут быть использованы при построении и исследовании широкого класса стохастических непрерывно-временных моделей, основанных на идеях максимизации полезности экономическими агентами и на принципах рыночного равновесия.

Статья поступила в редакцию 25 июля 2007 г.