ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЫНКА: УСТОЙЧИВОСТЬ И АВТОКОЛЕБАНИЯ

Труды Минского института управления. 2007. №2

В.П. Кузнецов*, доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и высшей математики Минского института управления*

1. Постановка задачи

Как известно, рынок является саморегулирующимся механизмом, т.е. автоматической (кибернетической) системой, использующей принцип обратной связи. В таких системах возможны как устойчивые, так и неустойчивые режимы работы. Более того, при определенных условиях в системе могут возникать периодические колебания. Например, сезонные колебания цен на рынке или известные из литературы колебания цен на свинину, выявленные в середине XX века и названные «свиными циклами».

В [1] предложена обобщенная структурная схема динамической модели рынка, частными случаями которой являются непрерывные и дискретные модели, а также возможность учета нелинейных свойств отдельных элементов и учета запаздывания. В [1] представлены некоторые результаты анализа линейных непрерывных динамических моделей рынка, а в [2] рассматриваются линейные дискретные модели.

В настоящей работе делается попытка сравнительного анализа различного типа моделей рынка на предмет устойчивости и неустойчивости процессов, а также возможности возникновения периодических режимов, в частности, автоколебательных.

2. Структура динамической модели рынка

В соответствии с [1] обобщенная структура динамической модели рынка представлена на рис 1.

На нем Φ_1 и Φ_2 – функциональные блоки, характеризующие свойства канала предложения и спроса соответственно. Координаты x – предложение, y – спрос, u – цена, которые характеризуют рынок, – объект управления (ОУ). Управляющая часть (УЧ) характеризуется функциональным блоком Φ_0, а переменная $e = \upsilon - (x - y)$ является отклонением между разностью предложения и спроса и некоторым внешним задающим (командным) воздействием.

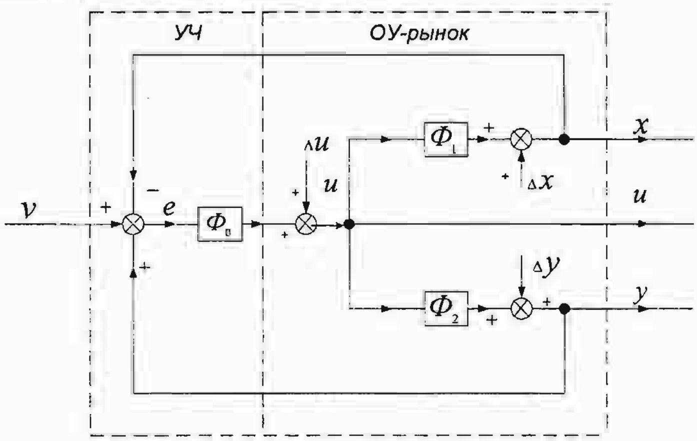

Рисунок 1

Если $\upsilon \neq 0$, то рынок является регулируемым, если $\upsilon = 0$, – свободным. В дальнейшем будем рассматривать свободный рынок, т.е. исследовать собственные процессы автономной системы. Переменные Δu, Δx, Δy – возмущения соответствующих координат.

Рассмотрим основные допущения и предположения, которые приняты в настоящей работе относительно свойств функциональных блоков Φ_0, Φ_1, Φ_2. Блоки Φ_1, Φ_2, характеризующие каналы предложения и спроса, могут быть в простейшем случае статическими либо динамическими – описываться дифференциальными уравнениями. Нелинейности, характеризующие эти блоки (кривые спроса и предложения), являются гладкими и в точке их пересечения, определяющей равновесную цену, допускают линеаризацию. Кроме того, в эти блоки могут входить звенья с чистым запаздыванием. Что касается блока Φ_0, то он определяет закон регулирования либо непрерывного, либо дискретного типа.

3. Линейная непрерывная динамическая модель рынка

Все блоки Φ_0, Φ_1, Φ_2 описываются линейными дифференциальными уравнениями, которые получены на основе процедуры линеаризации в точке равновесия (относительно равновесной цены), так что все координаты системы – это соответствующие отклонения от равновесных значений. Динамические свойства блоков Φ_0, Φ_1, Φ_2 характеризуются соответствующими передаточными функциями $W_0(s) = k_0/s$, $W_1(s) = k_1/(T_1 s + 1)$, $W_2(s) = -k_2/(T_2 s + 1)$, где s – комплексная переменная в преобразовании Лапласа, k_0, k_1, k_2 – коэффициенты передачи, T_1, T_2 – постоянные времени, характеризующие инерционные свойства звеньев. Регулятор Φ_0 полагаем астатическим (интегральный закон регулирования), что в установившемся режиме дает равновесную цену, при которой спрос равен предложению.

Устойчивость в такой системе, а также основные динамические показатели определяются корнями характеристического уравнения замкнутой системы [1]

$$1 + W_0(s)[W_1(s) - W_2(s)] = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + \\ + (1 + k_0 k_1 T_2 + k_0 k_2 T_1)s + k_0(k_1 + k_2) = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим три простейших случая:

1) каналы спроса и предложения безинерционны $T_1 = T_2 = 0$, тогда уравнение (1) будет $s + k_0(k_1 + k_2) = 0$ и при любых $k_0, k_1, k_2 > 0$ корень (1) будет отрицательным и система устойчива, что соответствует модели Эванса;

2) либо $T_1 = 0$, $T_2 \neq 0$, либо $T_1 \neq 0$, $T_2 = 0$, тогда имеем уравнение второго порядка и при условии $k_0, k_1, k_2 > 0$ и $T_1 > 0$ либо $T_2 > 0$, система будет устойчива;

3) если $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ (оба канала инерционны) в [1] показано, что при $k_0, k_1, k_2 > 0$ система будет всегда устойчива.

Итак, в непрерывных моделях в простейших системах устойчивость сохраняется при низких порядках передаточных функций. Возникновение неустойчивости процессов возможно лишь в том случае, если каналы спроса и предложения описываются уравнениями более высокого порядка.

4. Линейная непрерывная динамическая модель рынка с запаздыванием

Как известно [3], наличие запаздывания в замкнутом контуре управления ухудшает условия устойчивости и может привести к неустойчивости системы. Передаточные функции блоков Φ_0, Φ_1, Φ_2 будем полагать $W_0(s) = k_0/s$, $W_1^*(s) = e^{-s\tau_1}W_1(s)$, $W_2^*(s) = e^{-s\tau_2}W_2(s)$, где множители $e^{-s\tau_1}$, $e^{-s\tau_2}$ учитывают чистое запаздывание каналов предложения и спроса, а τ_1, τ_2 – время запаздывания. В этом случае устойчивость и динамические качества системы будут зависеть от корней характеристического уравнения замкнутой системы, которое для системы с запаздыванием будет иметь вид

$$1 + W_0(s)\left[e^{-s\tau_1}W_1(s) - e^{-s\tau_2}W_2(s)\right] = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) относительно s является трансцендентным и имеет бесчисленное количество корней. Применение алгебраических критериев устойчивости Рауса, Гурвица и т.п. затруднительно или невозможно, а вот использование частных критериев устойчивости Михайлова или Найквиста возможно [3].

Для понимания физических явлений в динамической модели рынка с запаздыванием рассмотрим ряд частных случаев. Пусть $W_0(s) = k_0/s$, а каналы спроса и предложения безинерционны $W_1(s) = k_1 e^{-s\tau_1}$, $W_2(s) = -k_2 e^{-s\tau_2}$. В этом случае из (2) будем иметь

$$s + k_0\left(k_1 e^{-s\tau_1} + k_2 e^{-s\tau_2}\right) = 0. \quad (3)$$

Для анализа устойчивости применим частотный критерий Михайлова [3]. В (3) сделаем замену $s = jw$, где $j = \sqrt{-1}$, w – частота. Выделяя в (3) действительную и мнимую части, получим

$$k_0k_1\cos\tau_1 w + k_0k_2\cos\tau_2 w + \\ + j(w - k_0k_1\sin\tau_1 w - k_0k_2\sin\tau_2 w) = D(jw). \quad (4)$$

Выражение (4) определяет при изменении w от нуля до бесконечности годограф, или кривую Михайлова. Условием нахождения системы на границе устойчивости является [3] равенство нулю действительной и мнимой частей годографа $D(jw)$

$$k_0k_1\cos\tau_1 w + k_0k_2\cos\tau_2 w = 0, \\ w - k_0k_1\sin\tau_1 w - k_0k_2\sin\tau_2 w = 0. \quad (5)$$

Исключая w из двух уравнений, можно связать параметры системы k_0, k_1, k_2, τ_1, τ_2, при которых имеем критический случай.

Рассмотрим частные случаи. При $\tau_1 = \tau_2 = 0$ ни при каких w (5) не выполняется. Имеем частный случай, рассмотренный выше, в разделе 3, т.е. такая система непрерывного типа без запаздывания всегда устойчива.

Пусть теперь $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, т.е. запаздывание в канале спроса и предложения одинаково. Тогда из (5) получим

$$k\cos\tau w = 0, \\ w - k\sin\tau w = 0, \quad (6)$$

где: $k = k_0(k_1 + k_2)$.

Так как $k \neq 0$, то из первого уравнения имеем $\cos\tau w = 0$ и $w = \pi/2\tau$. Подставляя полученную частоту во второе уравнение, будем иметь

$$k = \frac{\pi}{2\tau}. \quad (7)$$

При $k > \pi/2\tau$ система будет неустойчивой. Если задана величина k, то из (7) найдем критическое время запаздывания $\tau_{кр} = \pi/2k$, т.е. при $\tau > \tau_{кр}$ система теряет устойчивость.

Рассмотрение общего случая, когда $\tau_1 \neq \tau_2 \neq 0$ приводит к необходимости решения системы трансцендентных уравнений (5).

Рассмотрим теперь случай, когда в каналах спроса и предложения учитывается их инерционность, т.е. будем полагать $W_0(s) = k_0/s$, $W_1(s) = k_1/(T_1 s + 1)$, $W_2(s) = -k_2/(T_2 s + 1)$. В этом случае из (2) имеем

$$T_1T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k_0k_1(T_2 s + 1)e^{-s\tau_1} + \\ + k_0k_2(T_1 s + 1)e^{-s\tau_2} = 0. \quad (8)$$

Далее делая замену $s = jw$, выделяя действительную и мнимую части и приравнивая их к нулю, получим систему двух трансцендентных уравнений относительно переменных системы и частоты w.

В целом методика применима в общем случае для любых порядков передаточных функций $W_0(s), W_1(s), W_2(s)$. Исходя из частных случаев можно констатировать, что запаздывание в каналах спроса и предложения ухудшает устойчивость системы по сравнению с непрерывным случаем.

5. Линейная дискретная динамическая модель рынка

В [2] предложена и рассмотрена динамическая модель рынка с дискретным (импульсным) способом регулирования, когда управляющее воздействие u (рис. 1) изменяет предложение x и спрос y через некоторые промежутки времени T – интервалы дискретизации. Будем полагать, что длительность импульсов сигнала управления u совпадает с периодом дискретизации, а все звенья системы являются линейными.

Динамические свойства замкнутой дискретной системы будут определяться корнями характеристического уравнения [2]

$$1 + W_1(z) - W_2(z) = 0,$$

где: $$W_1(z) = Z\{W_{фу}(s)W_0(s)W_1(s)\}, \\ W_2(z) = Z\{W_{фу}(s)W_0(s)W_2(s)\}. \quad (8)$$

В (8) $W_1(z), W_2(z)$ – дискретные передаточные функции, Z – символ операции взятия дискретного преобразования Лапласа (Z-преобразование), z – комплексная переменная, $W_{фу}(s) = (1 - e^{-sT})/s$ – передаточная функция формирователя импульсов.

Применяя к (8) известные критерии устойчивости дискретных систем, можно проанализировать устойчивость динамической модели рынка. Пусть, например, $W_0(s) = k_0/s$, $W_1(s) = k_1$, $W_2(s) = -k_2$, тогда $W_1(z) = k_0k_1T/(z-1)$, $W_2(z) = -k_0k_2T/(z-1)$, а уравнение (8) будет иметь вид

$$z + [k_0(k_1 + k_2)T - 1] = 0.$$

Система станет устойчивой, если корень полученного уравнения $z_1 = 1 - k_0(k_1 + k_2)T$ будет по модулю меньше единицы. Т.е. условие устойчивости будет

$$0 < k_0(k_1 + k_2)T < 2. \quad (9)$$

Из полученного неравенства следует, что при любом конечном T общий коэффициент усиления системы $k = k_0(k_1 + k_2)$ имеет ограничение из условий устойчивости $k < 2/T$, т.е. при $k > 2/T$ система будет неустойчивой.

В [2] приведен более подробный анализ для случая инерционных каналов спроса и предложения, где также показано, что при $T \to 0$ устойчивость системы улучшается и по своим свойствам дискретная система приближается к непрерывной, рассмотренной в разделе 3.

6. Нелинейная динамическая модель рынка

Как известно, периодические режимы, в том числе и автоколебательные, возникают в динамических системах только при наличии в замкнутом контуре нелинейных элементов. Напомним, что автоколебательным режимом или автоколебаниями будем называть устойчивые периодические режимы, частным случаем которых являются гармонические.

Предположив возможность возникновения автоколебаний в моделях рынка, следует обсудить возможные виды нелинейностей и места их включения. Будем полагать, что нелинейными являются каналы предложения и спроса, включающие статические нелинейные характеристики $f_1(u)$ и $f_2(u)$ и далее соответственно линейные звенья с передаточными характеристиками $W_1(s)$ и $W_2(s)$.

Уравнения, связывающие переменные в замкнутой системе (рис. 1), имеют вид $y = W_2 f_2(u)$, $x = W_1 f_1(u)$, $u = W_0(y - x)$, или уравнение относительно координаты u

$$u + W_0(W_1 f_1(u) - W_2 f_2(u)) = 0.$$

Для понимания физики процессов в нелинейной системе рассмотрим случай $f_1 = f_2 = f$. Тогда имеем

$$u + W_0(W_1 - W_2)f(u) = 0. \qquad (10)$$

Анализ периодических режимов в системе, описываемой уравнением (10), может быть проведен методом фазовой плоскости, методом припасовывания, методом точечных преобразований или методом гармонического баланса [4]. Рассмотрим последний, в котором нелинейность $f(u)$ подвергается гармонической линеаризации, в результате которой $f(u) = W_н(a)u$, где: $W_н(a) = q(a) + jq'(a)$, $q(a)$ и $q'(a)$ – коэффициенты гармонической линеаризации, a – амплитуда искомого автоколебания.

Условием существования гармонического периодического режима будет выполнение условия

$$W(jw) = -\frac{1}{W_н(a)}, \qquad (11)$$

где: $W = W_0(W_1 - W_2)$.

Уравнение (11) имеет следующую геометрическую интерпретацию: если годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики $W(jw)$ при изменении частоты w от нуля до бесконечности в комплексной плоскости пересекает кривую $-1/W_н(a)$, то в системе существует периодический режим, частота и амплитуда которого определяются в точке пересечения этих кривых. В [4] дается методика определения устойчивости полученного периодического режима.

Перейдем к конкретному случаю. Можно предположить, что при определенных колебаниях цены относительно равновесной законы изменения спроса и предложения будут линейными, а при ее дальнейшем увеличении или уменьшении наступает «насыщение», т.е. спрос и предложение остаются постоянными. Нелинейная характеристика в этом случае имеет вид

$$f(u) = \begin{cases} u \text{ при } |u| \le c, \\ c \text{ при } u \ge c, \\ -c \text{ при } u \le -c, \end{cases}$$

а коэффициент гармонической линеаризации $q(a)$ ($q'(a) = 0$) будет [4]

$$q(a) = \begin{cases} 1 \text{ при } a \le c, \\ \dfrac{2}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{c}{a} - \dfrac{c}{a}\sqrt{1 - \dfrac{c^2}{a^2}}\right) \text{ при } a \ge c. \end{cases} \qquad (12)$$

Выражение $-1/W_н(a)$ с учетом (12) в комплексной плоскости представляет собой прямую – отрезок действительной оси, начинающейся в точке с координатами $(-1, j0)$ и уходящей в минус бесконечность по этой оси при $a \to \infty$.

Рассмотрим простейшие случаи, соответствующие рассмотренным в разделе 2.

Если $W_0(s) = k_0/s$, $W_1(s) = k_1$, $W_2(s) = -k_2$, то $W(s) = k_0(k_1 + k_2)/s$. Годограф частотной характеристики $W(jw)$ совпадает с отрицательным отрезком мнимой оси и никогда не пересекает прямую $-1/W_i(a)$, т.е. в системе периодический режим невозможен. Если $W_0(s) = k_0/s$, $W_1(s) = k_1/(T_1 s + 1)$, $W_2(s) = k_2/(T_2 s + 1)$, то также можно показать, что годограф не будет пересекать отрезка $-1/W_н(a)$, т.е. периодический режим (соответственно и автоколебания) не возможен.

Итак, при заданной нелинейности вероятность возникновения периодических режимов возможна лишь в предположении высоких порядков дифференциальных уравнений каналов спроса и предложения.

В случае дискретных систем и систем с запаздыванием, которые более склонны к неустойчивости, учет нелинейных свойств системы возможен аналогичным образом. При этом можно предполагать, что возникновение периодических режимов и автоколебаний будет более вероятным, а сами режимы – более сложными.

7. Заключение

На базе общей теории управления систем с обратными связями развивается методика описания и исследования динамических моделей рынка. Характерными особенностями предполагаемой методики являются единство структуры и общность подходов к описанию непрерывных и дискретных моделей рынка, а также возможность учета запаздывания и нелинейностей отдельных элементов.

Сравнительный анализ трех видов линейных моделей – непрерывной, дискретной и непрерывной с запаздыванием – показывает, что в отношении устойчивости наиболее критичными являются дискретные модели и модели с запаздыванием, которые даже в случае первого порядка могут при определенных параметрах быть неустойчивыми. Непрерывные линейные модели обладают более «сильной» устойчивостью даже при порядке системы, равном трем, ни при каких значениях параметров они не теряют устойчивость.

Периодические режимы в нелинейных непрерывных системах при низком порядке системы не возникают. Вероятность их возникновения следует связывать с более высоким порядком системы или влиянием дискретности и запаздывания.

Литература

1. Кузнецов В.П. Динамические модели рынка // Экономика и управление. 2005. №2. С. 14–17.
2. Кузнецов В.П. Дискретные динамические модели рынка // Труды Минского института управления. 2007. № 1.
3. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974.
4. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1979.

Резюме

Рассмотрена структурная модель динамики рынка, включающая управляющую часть и каналы предложения и спроса. Управление в системе осуществляется путем сравнения предложения и спроса, так что рассогласование между ними является информацией для изменения управляющего воздействия – цены. Модель позволяет с достаточно общих позиций теории управления системами с обратными связями и по единой методологии исследовать различные модели рынка: свободный и регулируемый рынок, непрерывные и дискретные модели, модели с запаздыванием и нелинейные модели.

Изложена методика анализа устойчивости различных линейных моделей и обсуждены вопросы возникновения автоколебаний в нелинейном случае. Показано, что наиболее

устойчивыми при вариации параметров являются непрерывные линейные модели, которые всегда устойчивы при порядке системы, не превышающем трех, а неустойчивость может возникнуть лишь при более высоких порядках дифференциальных уравнений каналов предложения и спроса. Дискретные линейные модели и непрерывные линейные с запаздыванием могут терять устойчивость даже для случая первого порядка системы.

Рассмотрены вопросы анализа периодических режимов в нелинейных непрерывных моделях и задачи, связанные с определением автоколебаний.

Summary

A structural model of market dynamics that includes a management part as well as supply and demand channels is examined. System management is carried out through the comparison of supply and demand, therefore the discrepancy between them becomes the information on which altering the control action (i.e. price) is based. The model allows us to examine various market models (such as free market or controlled market; continuous and discrete models as well as models with a lagging effect and non-linear models) based on a rather general theory of managing systems with a feedback and on an integrated system.

The method of analyzing sustainability of various linear models is stated and the problems concerned with the appearance of self-oscillation in a non-linear case are discussed. It is shown that continuous linear models are particularly stable when there are parameter variations. Such linear models are always stable if the system exponent does not exceed three and the instability can only arise when the differentiation equation exponents of supply and demand channels are higher than three. Discrete linear models and continuous linear models with a lagging effect can loose their stability even in the case of a first order of a system.

The problems of analyzing periodical regimes in non-linear continuous models and objectives concerned with defining self-oscillation are examined.