Труды Минского института управления. 2007. №1

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЫНКА

***Кузнецов В.П.**, доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и высшей математики МИУ*

1. Постановка задачи

В работе [1] предложена обобщенная математическая модель рынка в виде объекта управления – рынка, управляющим воздействием для которого является цена, а выходными (регулируемыми) координатами – спрос и предложение. Там же приведен ряд результатов анализа линейной модели рынка в предположении непрерывного закона регулирования. В настоящей работе рассматривается дискретный вариант рыночной модели. Структура модели как частный случай [1] приведена на рис. 1.

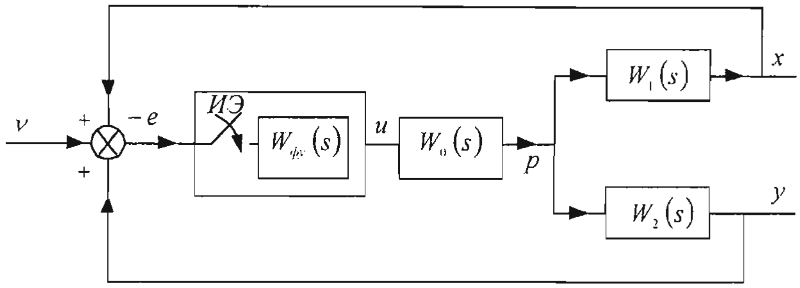

Рисунок 1. Структура модели

На этом рисунке: x – предложение, y – спрос, p – цена, $e = v - (x - y)$ – отклонение между разностью предложения и спроса и некоторым задающим (командным) воздействием. Если $v = 0$, то рынок является свободным, а при $v \neq 0$ – регулируемым. $W_0(s)$ – передаточная функция регулятора (определяет закон регулирования), $W_1(s)$ и $W_2(s)$ – передаточные функции каналов предложения и спроса, ИЭ – импульсный элемент, осуществляющий дискретизацию сигнала ошибки. Импульсный элемент, как это принято в теории импульсного (дискретного) управления [2], состоит из идеального импульсного элемента и формирующего устройства с передаточной функцией $W_{фу}(s)$. Частота квантования идеального импульсного элемента $\omega = 2\pi/T$, где: T – период дискретизации, а передаточная функция $W_{фу}(s) = (1 - e^{-sT})/s$, т.е. импульсный элемент является экстраполятором нулевого порядка [2], когда длительность импульсов совпадает с периодом дискретизации T.

Закон регулирования далее будем полагать интегральным $W_0(s) = k_0/s$. Это означает, что в установившемся режиме $e = 0$ и в случае свободного рынка $x = y$, т.е. имеем равновесную цену в точке пересечения кривых спроса и предложения.

Основное допущение модели – она является линейной, вернее, линеаризованной относительно положения равновесия, т.е. все координаты x, y, p, e и т.д. следует рассматривать как отклонения от установившегося режима.

2. Получение общей модели дискретной системы

Методики получения дискретных моделей достаточно подробно освещены в литературе [2, 3]. Дискретная передаточная функция, связывающая переменную x и сигнал ошибки e в случае экстраполятора нулевого порядка, может быть получена по выражению

$$W_1(z) = Z\{W_{\phi y}(s)W_0(s)W_1(s)\},$$

где: z – комплексная переменная в дискретном преобразовании Лапласа (Z – преобразование). Аналогично получим

$$W_2(z) = Z\{W_{\phi y}(s)W_0(s)W_1(s)\}.$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений относительно изображений

$$X(z) = W_1(z)E(z),\ Y(z) = W_2(z)E(z),$$
$$E(z) = V(z) + Y(z) - X(z),$$

из которой найдем связь сигнала ошибки и входа

$$E(z) = W_e(z)V(z) = \frac{1}{1 + W_1(z) - W_2(z)}V(z),$$

где: $W_e(z) = 1/[1 + W_1(z) - W_2(z)]$ – передаточная функция дискретной системы по ошибке. Зная $V(z)$, находим $E(z)$ и далее, если надо, $X(z)$ и $Y(z)$, т.е. выходные координаты системы.

Динамические свойства системы (устойчивость, быстродействие, колебательность и т.п.) в значительной степени будут определяться корнями характеристического уравнения замкнутой системы

$$1 + W_1(z) - W_2(z) = 0. \qquad (1)$$

3. Анализ процессов для случая безинерционных каналов спроса и предложения

В этом случае $W_0(s) = k_0/s$, $W_1(s) = k_1$, $W_2(s) = k_2$, где: k_0, k_1, k_2 – коэффициенты передачи звеньев, причем k_1, k_2 характеризуют наклоны линий предложения и спроса. Далее следует помнить, что всегда $k_2 < 0$. В соответствии с методикой [2] получим

$$W_1(z) = \frac{k_0 k_1 T}{z-1},\ W_2(z) = \frac{k_0 k_2 T}{z-1},$$

а характеристическое уравнение (1) будет

$$z + [k_0(k_1 - k_2)T - 1] = 0, \qquad (2)$$

корень которого $z_1 = 1 - k_0(k_1 - k_2)T$.

Условие устойчивости модели $|z_1| < 1$ с учетом $k_2 < 0$ имеет вид

$$0 < k_0(k_1 + k_2)T < 2,\ k_2 > 0. \qquad (3)$$

Процессы установления цены на рынке будут колебательными, если $-1 < z_1 < 0$ и монотонными, если $0 < z_1 < 1$, что приводит к соответствующим условиям

$$1 < k_0(k_1 + k_2)T < 2, \qquad (4)$$

$$0 < k_0(k_1 + k_2)T < 1. \qquad (5)$$

На рис.2 приведены область устойчивости (ограничена штриховкой) и область колебательных (область 1) и монотонных (область 2) процессов. где: $k = k_0(k_1 + k_2)$.

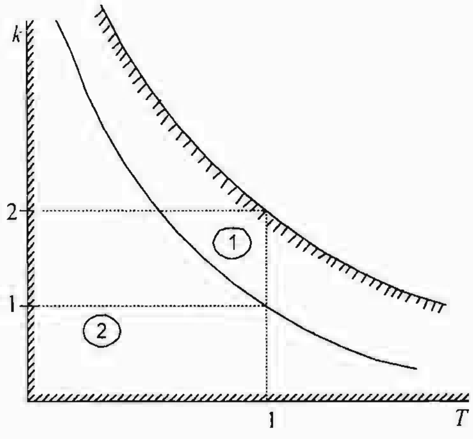

Рисунок 2. Области устойчивости, колебательных и монотонных процессов

Существенно отметить, что динамика системы зависит от периода дискретизации T. При $T \to 0$ система будет устойчива для любого сколь угодно большого коэффициента передачи K и по своим свойствам приближается к непрерывной, что соответствует условиям теоремы Шеннона-Котельникова. С увеличением T устойчивость ухудшается.

Из (2) нетрудно получить разностное уравнение, например, относительно цены

$$p(k+1) + [k_0(k_1 - k_2)T - 1]p(k) = 0, \qquad (6)$$

где: $k = 0,1,2,\ldots$ – дискретное время.

Модель (6) совпадает с моделью Эванса [4].

4. Модель с учетом инерционности каналов спроса и предложения

Этот случай, вероятно, более реален, чем предыдущий, т.к. и спрос, и предложение относительно цены обладают определенной инерционностью. Здесь будем полагать

$$W_0(s)=\frac{k_0}{s},\ W_1(s)=\frac{k_1}{T_1s+1},\ W_2(s)=\frac{k_2}{T_2s+1},$$

где: T_1, T_2 – постоянные времена, характеризующие инерционность предложения и спроса.

Итак, используя методику [2], находим дискретные передаточные функции

$$W_1(z)=k_0k_1T\left[\frac{1}{z-1}+\frac{d_1-1}{\alpha_1(z-d_1)}\right],$$

$$W_2(z)=k_0k_2T\left[\frac{1}{z-1}+\frac{d_2-1}{\alpha_2(z-d_2)}\right],$$

где $\alpha_1=T/T_1$, $d_1=e^{\alpha_1}$, $\alpha_2=T/T_2$, $d_2=e^{-\alpha_2}$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы (1) для данного случая будет иметь вид

$$z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0, \qquad (7)$$

где: $a_1=A+B_1+B_2-d_1-d_2-1$,

$$a_2=(d_1+d_2)(1-A)+d_1d_2-B_1(1+d_2)-B_2(1+d_1),$$

$$a_3=B_1d_2+B_2d_1+(A-1)d_1d_2,$$

$$A=k_0(k_1+k_2)T,\ B_1=\frac{k_0k_1T}{\alpha_1}(d_1-1),$$

$$B_2=\frac{k_0k_2T}{\alpha_2}(d_2-1).$$

В выражении (7) учтено, что k_2 – отрицательная величина, т.е. следует полагать в (7) $k_2>0$.

Динамика рассматриваемой системы будет описываться разностным уравнением третьего порядка. При $\nu=0$ относительно ошибки *e* это будет уравнение

$$e(k+3)+a_1e(k+2)+a_2e(k+1)+a_3e(k)=0.$$

Динамические свойства системы будут определяться корнями уравнения (7). Так, система будет устойчива при выполнении следующих неравенств:

$$\begin{aligned}&1+a_1+a_2+a_3>0,\\&3(1-a_3)+a_1-a_2>0,\\&3(1+a_3)-a_1-a_2>0,\\&1-a_1+a_2-a_3>0,\\&1-a_3^2+a_1a_3-a_2>0.\end{aligned} \qquad (8)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть инерционности каналов спроса и предложения равны, т.е. $T_1=T_2$. Тогда характеристическое уравнение будет

$$z^2+a_1z+a_2=0, \qquad (9)$$

где:

$$a_1=k(1+A)-1-d_1,\ a_2=d_1-kd_1-kA,.$$
$$k=k_0(k_1+k_2)T,\ A=(d_1-1)/\alpha_1.$$

Условия устойчивости имеют вид

$$1+a_1+a_2>0, 1-a_1+a_2>0,\ 1-a_2>0,$$

которые после подстановки a_1, a_2 дают

$$\begin{aligned}&k(1-d_1)>0,\\&2(1+d_1-kA)-k(1+d_1)>0,\\&1-d_1+(A+d_1)k>0.\end{aligned} \qquad (10)$$

Так как $d_1\le 1$, то первое условие всегда выполняется, и остаются два последних неравенства. Анализ неравенств показывает, что при $T\to 0$ величина $k\to 0$ и неравенства (10) будут всегда выполняться, т.е. по своим свойствам дискретная система приближается к непрерывной. Например, при $T=T_1$ инерционность каналов сопоставима с периодом дискретизации, и мы имеем $\alpha_1=1$, $d_1=1/e$, $A=(1-e)/e$. Подставляя эти значения в (10), будем иметь $k>0$, $k<25$, $k<2{,}4$, т.е. условием устойчивости будет выполнение неравенства

$$0<k_1'<2{,}4-k_2',\ k_1'>0,\ k_2'>0, \qquad (11)$$

где: $k_1'=k_0k_1T$, $k_2'=k_0k_2T$.

Рассмотрим второй частный случай, когда один из каналов является инерционным, а другой – безинерционным. Так как каналы симметричны, то будем полагать $T_2=0$. Характеристическое уравнение будет квадратным уравнением (9), коэффициенты которого

$$a_1=k_1'(1+A)-1-d_1+k_2',$$

$$a_2=d_1-k_2'd_1-k_1'(A+d_1),$$

где: $k_1'=k_0k_1T$, $k_2'=k_0k_2T$, $A=(d_1-1)/\alpha_1$.

Условия устойчивость примут вид:

$$\begin{aligned}&(k_1'+k_2')(1-d_1)>0,\\&2(1+d_1-k_1'A)-(k_1'+k_2')(1+d_1)>0,\\&1-d_1+k_2'd_1+k_1'(A+d_1)>0,\end{aligned} \qquad (12)$$

первое из которых всегда выполняется при $k_1'>0$, $k_2'>0$. В качестве примера рассмотрим случай $T_1=T$, $\alpha_1=1$, $d_1=1/e$, $A=(1-e)/e$. Подставляя численные значения в (11), получим:

$$\begin{aligned}&k_1'<2{,}6+1{,}5k_2',\\&k_1'<25-12{,}5k_2',\\&k_1'>0,\ k_2'>0.\end{aligned} \qquad (13)$$

Коэффициенты k_1' и k_2' можно интерпретировать как эквивалентные коэффициенты передачи каналов сбыта и предложения. На рис. 3 представлены области устойчивости в плоскости коэффициентов k_1' и k_2' для двух случаев (11) и (13). Для случая (11) это треугольник oab, а для (13) четырёхугольник $ocde$.

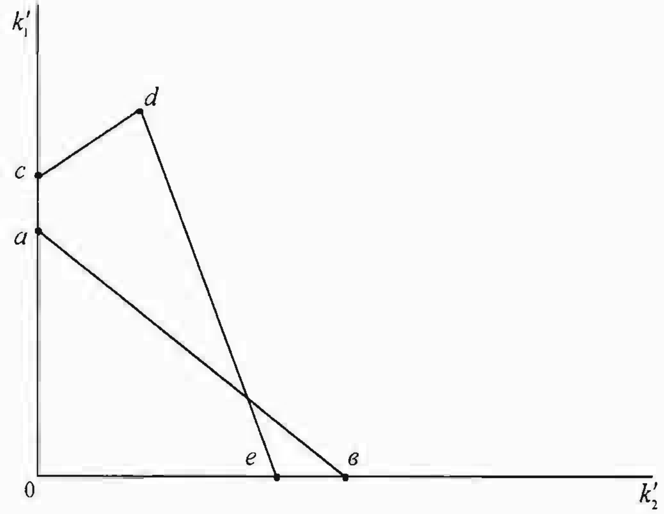

Рисунок 3. Области устойчивости в плоскости коэффициентов

5. Заключение

В развитие результатов работы [1] рассмотрена и предложена методика нахождения дискретных линейных динамических моделей рынка в виде замкнутой системы регулирования, содержащей импульсный элемент, регулятор и два канала: спроса и предложения. Регулятор, канал спроса и предложения являются динамическими звеньями и характеризуются соответствующими передаточными функциями.

Предложенная общая методика позволяет исследовать динамические свойства рыночной модели, анализировать устойчивость и вычислять процессы изменения цены, спроса или предложения.

Рассмотрены некоторые частные случаи: интегрального закона регулирования и случая безинерционных либо инерционных каналов спроса и предложения. Даны условия устойчивости рыночной модели. Существенными особенностями такого подхода являются:

– общность получения моделей различного типа: непрерывных, дискретных и т.п.;

– возможность учёта различных видов как законов управления, так и динамических характеристик каналов спроса и предложения;

– наглядность и физичность процессов саморегулирования рынка;

– для дискретного случая наблюдается зависимость динамических свойств модели от периода (частоты) дискретизации, что совпадает с общей концепцией теории дискретных систем управления;

– показано, что при $T \to 0$ свойства модели приближаются к свойствам непрерывной модели.

Литература

1. Кузнецов В.П. Динамические модели рынка //Экономика и управление. 2005. № 2. С. 14–17.

2. Кузнецов В.П. Линейные импульсные системы: Математическое описание. Минск: БГУИР, 1996.

3. Теория автоматического регулирования. Ч.2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. М.: Высшая школа, 1986.

4. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2002.

Резюме

Предложена дискретная динамическая модель рынка в виде замкнутой системы управления. Величина рассогласования между спросом и предложением подвергается дискретизации, и управляющее воздействие представляет собой последовательность импульсов, ширина которых совпадает с периодом дискретизации. Рассмотрен интегральный закон регулирования. Предложена общая методика получения математических моделей на базе дискретного преобразования Лапласа. Рассмотрены частные случаи безинерционных и инерционных каналов спроса и предложения. Приведен анализ устойчивости рыночной модели.

Summary

A discrete dynamic market model in the form of a closed management system is suggested. The scale of the unbalance between the demand and the supply is being digitized. The control action is a succession of impulses the width of which coincides with the period of digitization. The integral regulation law is examined. A general method of obtaining mathematical models based on z-transformation is suggested. Some particular cases of accelerative and non-accelerative demand and supply channels are examined. The analysis of the market model stability is given.

* Статья поступила в редакцию 14.12.2006 г.