# ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО АППРОКСИМАЦИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

Труды Минского института управления. 2005. №1

*Астровский А.И., кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики*

**Резюме**. Описывается операторное уравнение на множестве линейных нестационарных систем наблюдения, решения которого порождают канонические формы Фробениуса. Доказывается ряд условий существования и единственности канонических форм Фробениуса. Построена аппроксимация операторного уравнения, которая порождает канонические формы Фробениуса для дискретных систем наблюдения. Получены условия сходимости решений дискретных операторных уравнений.

**Summary.** The article describes operational equation on the multitude of linear nonstationary observation systems, which solutions result in canonical Frobenious forms. Some conditions of existence and uniqueness of canonical Frobenious forms have been proved. The approximation of the operational equation has been formed, which gives rise to canonical Frobenious forms for discrete observation systems. The conditions of convergence for solutions of discrete operational equations have been obtained.

Как известно, вопрос о преобразовании линейной непрерывной нестационарной системы наблюдения (управления) к канонической форме Фробениуса играет важную роль при исследовании ряда задач математической теории управления. Один из подходов к построению канонических форм заключается в исследовании разрешимости соотношений (операторных уравнений), связывающих исходные матрицы системы и параметры канонической формы. В данной работе описывается операторное уравнение на множестве систем наблюдения и доказывается ряд условий существования и единственности канонических форм Фробениуса. Аппроксимация операторного уравнения приводит к дискретным уравнениям, решения которых порождают канонические формы для дискретных систем наблюдения. Так как нахождение канонических форм для линейных дискретных систем в ряде случаев не составляет большого труда, то представляется целесообразным использовать канонические формы дискретных систем для построения канонических форм для непрерывных систем. Естественно возникает вопрос о связи канонических форм дискретных систем и непрерывных. В работе рассматривается сходимость решений дискретных операторных уравнений.

**1. Постановка задачи. Основные понятия и соотношения.** Рассмотрим на отрезке $T=[t_0, t_1]$ линейную нестационарную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad (1)$$

у которой $x(t)$ – $n$-вектор-столбец состояния в момент $t$, а $(n\times n)$-матрица $A(t)$ непрерывна на $T$. Пусть $c(t),\ t\in T$ – заданная непрерывная $n$-вектор-функция строка. Выходную функцию $y(t),\ t\in T$ системы (1), которая связана с состоянием $x(t)$ соотношением

$$y(t) = c(t)x(t),\quad t\in T, \qquad (2)$$

будем также обозначать символом $y(t, x_0)$, чтобы подчеркнуть ее связь с начальным состоянием $x_0 = x(t_0)\in R^n$ системы (1).

Отождествим систему наблюдения (1), (2) с парой $(A, c)$, состоящей из матричной функции $A(t)$ и векторной функции $c(t)$, а множество всех таких пар с непрерывными компонентами на $T$ обозначим через $\Sigma$, т.е. $\Sigma = C(T, R^{n\times n})\times C(T, R^n)$. Здесь

$C(T,R^n)$ – множество $n$-вектор-функций строк с непрерывными элементами.

В математической теории систем важную роль играют канонические пары ($A^0$, $c^0$) в форме Фробениуса

$$A^0(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1(t) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix},\quad c^0(t)=(0\ \ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0\ \ 1), \qquad (3)$$

с функциями $\alpha_j \in C(T,R),\ \ j\in(0,1,\dots,n-1)$. Совокупность всех пар ($A^0$, $c^0$) в форме Фробениуса с непрерывными на $T$ функциями $\alpha_0(t),\alpha_1(t),\dots,\alpha_{n-1}(t)$ обозначим через K. В [1–4], выделен класс $\Re_n^0 \subset \Sigma$ равномерно наблюдаемых систем с гладкими инвариантами, для которых предложен конструктивный способ построения канонических форм Фробениуса. В этих работах также приведены примеры, показывающие, что канонические формы вида (3) существуют и для более широкого класса систем, чем множество $\Re_n^0$. В [5] дано полное решение проблемы построения канонических форм Фробениуса для систем (1), (2), а также исследована хессенбергова наблюдаемость, которая введена в [6, 7].

В данной работе исследуется возможность преобразования исходной системы наблюдения (1), (2) к системе в форме Фробениуса на основе разрешимости и аппроксимации операторного уравнения.

Введем вначале необходимые понятия и обозначения, а также установим ряд утверждений, которые будут полезны в дальнейшем.

Пусть G – множество всех невырожденных при каждом $t\in T$ квадратных $(n\times n)$-матриц $G(t)$, принадлежащих классу $C^1(T,R^{n\times n})$, т.е. G состоит из всех обратимых на $T$ $(n\times n)$-матриц $G(t)$ с непрерывно дифференцируемыми элементами. Несложно заметить, что множество G является группой относительно операции матричного умножения.

Действие группы G на паре ($A$, $c$) из $\Sigma$ определим стандартным образом:

$$G*(A,c)=\left(G^{-1}AG-G^{-1}\dot{G},\ cG\right),\quad G\in \mathrm{G}. \qquad (4)$$

Преобразование $(A,c)\to G*(A,c)$ в терминах пространства состояний системы (1) означает изменение переменных $x(t)$ по правилу $x(t)=G(t)z(t),\ \ t\in T$.

Символом O($A$, $c$) будем обозначать орбиту системы $(A,c)\in\Sigma$ относительно действия группы G, т.е.

$$\mathrm{O}(A,c)=\{(D,d)\in\Sigma:(D,d)=G*(A,c),\ G\in \mathrm{G}\}.$$

Введем в рассмотрение множество F всех пар ($A$, $c$) из $\Sigma$, в орбите каждой пары которого существует система ($A^0$, $c^0$) в форме Фробениуса. Ясно, что множество F описывается следующим образом:

$$\mathrm{F}=\{(A,c)\in\Sigma:(A,c)=G*(A^0,c^0),\ G\in \mathrm{G},\ (A^0,c^0)\in \mathrm{K}\}.$$

Отметим, что решение задачи о принадлежности заданной пары ($A$, $c$) из $\Sigma$ множеству F весьма важно при анализе и синтезе систем управления, обладающих заданными свойствами. С целью исследования этой задачи докажем ряд утверждений.

**Лемма 1.** *Если в орбите* O($A$, $c$) *системы* $(A,c)\in\Sigma$ *существует пара* ($A^0$, $c^0$) *в форме Фробениуса, то она единственная.*

*Доказательство*. Предположим, что в орбите O($A$, $c$) системы $(A,c)\in\Sigma$ существуют две различные пары $(A_1^0,c^0)$ и $(A_2^0,c^0)$ в форме Фробениуса. Тогда найдется такое преобразование $G\in\mathrm{G}$, что $A_1^0(t)=G^{-1}(t)A_2^0(t)G(t)-G^{-1}(t)\dot{G}(t)$. Обозначим строки матрицы $G(t)$ через $g_i(t)$, $i\in(1,2,\dots,n)$. Ясно, что $g_n(t)=c^0=(0,\ 0,\ \dots,\ 1)$. Анализ матричного равенства

$$G(t)A_1^0(t)=A_2^0(t)G(t)-\dot{G}(t)$$

с последней строки до первой показывает, что $g_i(t)=(0,\dots,0,1,0,\dots,0,0)$ (единица стоит на $i$-том месте). Следовательно $G(t)=E$, где $E$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Это указывает на равенство пар $(A_1^0,c^0)$ и $(A_2^0,c^0)$. Лемма доказана.

Пусть задана пара ($A$, $c$) из $\Sigma$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} G^{-1}(t)A(t)G(t)-G^{-1}(t)\dot{G}(t)=A^0(t),\\ c(t)G(t)=(0,0,\dots,0,1),\ t\in T \end{gathered} \qquad (5)$$

относительно неизвестных $(n\times n)$-матриц $G$ и $A^0$, для которых выполняется ограничение: $G\in\mathrm{G}$, а $(A^0,c^0)\in\mathrm{K}$. Выясним условия разрешимости системы (5). Для удобства изложения обозначим матрицу $G^{-1}(t)$ через $Q(t)$, а ее строки через $q_i(t)$, $i\in(1,2,\dots,n)$. Несложно заметить, что из (5) необходимо следуют равенство $q_n(t)=c(t), t\in T$, и включение $c\in C^1(T,R^n)$. В дальнейшем считаем это требование выполненным. С учетом вышеизложенного и равенства $Q(t)\dot{G}(t)=-\dot{Q}(t)G(t),\ t\in T$ соотношение (5) можно представить в эквивалентном виде

$$\dot{Q}(t)=A^0(t)Q(t)-Q(t)A(t),\ t\in T. \tag{6}$$

Под решением системы (6) будем понимать пару, состоящую из $(n\times n)$-матриц $Q(t)$ и $A^0(t)$, где $Q(t)$ – невырожденная непрерывно дифференцируемая матрица с последней строкой, равной $c(t)$, а $A^0(t)$ – матрица в форме Фробениуса. Примеры, приведенные в [2], показывают, что существуют пары $(A,c)\in\Sigma$, для которых система (6) не имеет решения.

Предположим, что система (6) имеет решения $Q(t)$, $A^0(t)$. Из леммы 1 следует, что это решение единственно. Простые матричные вычисления приводят к следующим соотношениям между строками $q_i(t)$, $i\in(1,2,\ldots,n)$ матрицы $Q(t)$ и функциями $\alpha_j(t)$, $j\in(0,1,\ldots,n-1)$, определяющими матрицу $A^0(t)$:

$$q_n(t)=c(t),\qquad q_{n-1}(t)=\dot{c}(t)+c(t)A(t)-\alpha_{n-1}(t)c(t),$$

$$q_{n-2}(t)=\dot{q}_{n-1}(t)+q_{n-1}(t)A(t)-\alpha_{n-2}(t)c(t),\ \ldots,$$

$$q_1(t)=\dot{q}_2(t)+q_2(t)A(t)-\alpha_1(t)c(t), \tag{7}$$

$$\dot{q}_1(t)+q_1(t)A(t)-\alpha_0(t)c(t)=0,\ t\in T. \tag{8}$$

Пусть $l_n(t)$ – последний столбец матрицы $G(t)$, $t\in T$. Из (7), (8), используя очевидные равенства

$q_i(t)l_n(t)=0,\ i\in(1,2,\ldots,n-1),\ c(t)l_n(t)=1,\ t\in T$

несложно получить формулы для функций $\alpha_j(t)$, $j\in(0,1,\ldots,n-1)$:

$$\alpha_0(t)=\left[q_1(t)A(t)+\dot{q}_1(t)\right]l_n(t),\ldots,\alpha_{n-1}(t)=$$
$$=\left[q_n(t)A(t)+\dot{q}_n(t)\right]l_n(t). \tag{9}$$

**2. Операторное уравнение и его свойства.** Введем в рассмотрение множество $\Sigma_3=\Sigma\times C(T,R^n)$, элементами которого являются тройки матриц $(A,c,v)$, состоящие из $A\in C(T,R^{n\times n}), c\in C(T,R^n), v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in C(T,R^n)$. Норму элемента $(A,c,v)\in\Sigma_3$ определим по формуле

$$\|(A,c,v)\|=\max_{t\in T}\|A(t)\|_{(n\times n)}+\max_{t\in T}\|c(t)\|+$$
$$+\max_{t\in T}\|v(t)\|.$$

Здесь $\|\cdot\|_{(n\times n)}$ и $\|\cdot\|$ – некоторые нормы в $R^{n\times n}$ и $R^n$ соответственно.

Пусть оператор $V:\Sigma_3\to\Sigma_3$ действует по правилу

$$V(A,c,v)=\left(A,\dot{c}+cA-v_1p,\ \varphi(v)\right),$$

где

$$p(t)=c(t),\ \varphi(v)=\varphi(v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n)=$$
$$=(v_2,v_3,\ldots,v_n,v_1).$$

Область определения $D$ оператора $V$ состоит из таких троек $(A,c,v)$, у которых функция $c(t)$ непрерывно дифференцируема. Если элементы $n$-вектор-функции

$$g(t)=\dot{c}(t)+c(t)A(t)-v_1(t)c(t)$$

принадлежат классу $C^1(T,R^n)$, то на тройке $(A,c,v)$ определен оператор $V:\Sigma_3\to\Sigma_3$, для которого $V^2(A,c,v)=V(V(A,c,v))=$

$$=V(A,g,\varphi(v))=\left(A,\dot{g}+gA-v_2p,\ \varphi(\varphi(v))\right).$$

По индукции можно определить любую степень $V^k:\Sigma_3\to\Sigma_3$ оператора $V$. Через $D_k$ обозначим область определения оператора $V^k$. Для $k$=0 полагаем $V^0(A,c,v)=(A,c,v)$ и $D_0$ =У$_3$. Подчеркнем, что область определения $D_n$ оператора $V^n$ не пуста, так как заведомо не пустое множество $\Re_s^0=$
$=\{(A,c,v)\in\Sigma_3:(A,c)\in\Re_n^0,\ \exists\, v\in C_0^{n-1}(T,R^n)\}$
является подмножеством $D_n$. Здесь $\Re_n^0$ – множество равномерно наблюдаемых систем класса $n$ с гладкими инвариантами (см. [2]), а $C_0^{n-1}(T,R^n)$ – множество $n$-мерных функций, у которых первая компонента ($n$-1) раз непрерывно дифференцируема, вторая – ($n$-2) раза непрерывно дифференцируема и т.д., а $n$-тая компонента непрерывна.

Рассмотрим на множестве $D_n$ операторное уравнение

$$V^n(A,c,v)=(A,\ 0,\ v). \tag{10}$$

Совокупность всех троек $(A,c,v)$, являющихся решениями уравнения (10), обозначим через $\Re_s$. Как следует из [2], множество $\Re_n^0$ является подмножеством $\Re_s$.

Простой анализ показывает, что если пара $(A,\ c)$ принадлежит множеству F (т.е. для нее существует каноническая форма Фробениуса $(A^0,\ c^0)$), то операторное уравнение (10) для этой пары $(A,\ c)$ имеет решение $(A,\ c,\ v)$. Далее будем говорить, что уравнение (10) при заданной паре $(A,\ c)$ имеет решение относительно $v(t)$, $t\in T$, если $(A,c,v)\in\Re_s$.

**Лемма 2.** *Пусть задана пара (A, c) из* $\Sigma$. *Если операторное уравнение (10) имеет решение относительно* $v(t)$, $t \in T$, *то оно единственно и определяет для указанной пары (A, c) каноническую форму Фробениуса* ($A^0$, $c^0$) *с функциями* $\alpha_{n-j}(t) = v_j(t)$, $j \in (1,2,...,n)$, $t \in T$.

*Доказательство*. Справедливость леммы 2 будет установлена, если доказать невырожденность матрицы $Q(t)$, строки $q_i(t)$ которой найдены по формулам (7) при $\alpha_{n-j}(t) = v_j(t)$, $j \in (1,2,...,n)$, $t \in T$, где $v(t)$ – решение уравнения (10) для пары $(A, c)$.

Пусть для заданной пары $(A,c) \in \Sigma$ уравнение (10) имеет решение и $v(t)$ – какое-то решение этого уравнения. По $\alpha_{n-j}(t) = v_j(t)$, $j \in (1,2,...,n)$, $t \in T$ определим матрицу $Q(t)$, используя формулы (7). Предположим, что при некотором $t^* \in T$ матрица $Q(t^*)$ вырождена. Следовательно, существует такой не нулевой вектор $g \in R^n$, что

$$c(t^*)g = 0,\ q_{n-1}(t^*)g =$$

$$= \left[\dot{c}(t^*) + c(t^*)A(t^*) - \alpha_{n-1}(t^*)c(t^*)\right]g =$$

$$= \left[\dot{c}(t^*) + c(t^*)A(t^*)\right]g = 0,$$

$$q_{n-2}(t^*)g = \left[\dot{q}_{n-1}(t^*) + q_{n-1}(t^*)A(t^*)\right]g =$$

$$= 0,...,\ q_1(t^*) = \left[\dot{q}_2(t^*) + q_2(t^*)A(t^*)\right]g = 0.$$

Полученные соотношения показывают, что матрица $Q(t)$, построенная для любого решения $v(t)$ уравнения (10), будет вырожденной в точке $t^*$. Однако, среди решений уравнения (10) существует такое, которое порождает невырожденную матрицу $Q(t)$ при всех $t \in T$. Следовательно, в силу леммы 1 решение $v(t)$ уравнения (10) единственно.

Итогом предыдущих утверждений является

**Теорема 1**. *В орбите системы (A, c), принадлежащей множеству* $\Sigma$, *существует каноническая пара* ($A^0$, $c^0$) *в форме Фробениуса с функциями* $\alpha_j \in C(T,R)$, $j \in (0,1,...,n-1)$ *тогда и только тогда, когда тройка (A,c,v),* $v=(б_{n-1}, б_{n-2}, ..., б_0)$ *является решением операторного уравнения (10).*

**3. Свойства множества выходных функций.** При исследовании множества F полезным оказывается рассмотрение множества $Y_T(A,c)$ всех выходных функций $y(t,x_0)$, $t \in T$ системы (1), (2):

$$Y_T(A,c)=\{\ y \in C(T,R): y=$$
$$= (y(t,x_0) = h(t)x_0,\ t \in T),\ x_0 \in R^n\ \},$$

где $n$-вектор-функция строка $h(t) \doteq c(t)F(t,t_0)$, а $F(t,t_0)$ – фундаментальная матрица решений системы (1).

**Лемма 3.** *Множество выходов* $Y_T(A,c)$ *системы (A, c) инвариантно относительно действия группы* G, *т.е. для любых двух систем (A, c) и (B, d) из* $\Sigma$, *принадлежащих одной и той же орбите, соответствующие им множества выходов* $Y_T(A,c)$ *и* $Y_T(B,d)$ *совпадают.*

Доказательство леммы 3 основано на том факте, что если две системы $(A, c)$ и $(B,d)$ принадлежат одной и той же орбите, то соответствующие им фундаментальные матрицы $F_A(t,t_0)$ и $F_B(t,t_0)$ связаны соотношением

$$F_A(t,t_0) = G(t)F_B(t,t_0)G^{-1}(t_0),\ t \in T,$$

где G – такая матрица из G, что

$$G^*(A,c) = (B,d).$$

Покажем далее, что если множества выходов $Y_T(A,c)$ и $Y_T(B,d)$ двух систем $(A,c) \in \Sigma$ и $(B,d) \in \Sigma$ совпадают, то эти системы принадлежат одной и той же орбите. Действительно, из равенства множеств $Y_T(A,c)$ и $Y_T(B,d)$ следует, что $c(t)F_A(t,t_0) = d(t)F_B(t,t_0)G_0$, $t \in T$ для некоторой невырожденной $(n \times n)$-матрицы $G_0$. Определим матрицу $G(t)$, $t \in T$ равенством

$$G(t) = F_A(t,t_0)G_0^{-1}F_B^{-1}(t,t_0).$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\left(G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G}, cG\right) = (B,d).$$

Исходя из леммы 3 и представления системы наблюдения в канонической форме Фробениуса, можно показать, что справедлива

**Лемма 4.** *Пусть в орбите пары (A, c) существует каноническая форма Фробениуса* ($A^0$, $c^0$) *с функциями* $\alpha_j \in C(T,R)$ $j \in (0,1,...,n-1)$. *Тогда множество выходов* $Y_T(A,c)$ *системы (A, c) совпадает с множеством решений следующего скалярного дифференциального уравнения*

$$\frac{d}{dt}\left\{...\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left\{\frac{dy(t)}{dt} - \alpha_{n-1}(t)y(t)\right\} - \alpha_{n-2}(t)y(t)\right\} - ...\right\} -$$

$$-\alpha_0(t)y(t) = 0,\ t \in \mathrm{T}. \qquad (11)$$

**Лемма 5.** Тройка $(A,c,v)$ является решением операторного уравнения (10) тогда и только тогда, когда множество выходов $Y_T(A,c)$ системы $(A,\ c)$ совпадает с множеством решений скалярного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\left\{\ldots\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left\{\frac{dy(t)}{dt}-v_1(t)y(t)\right\}-\atop -v_2(t)y(t)\right\}-\ldots\right\}-$$

$$-v_n(t)y(t)=0,\ t\in T.$$

**4. Общее описание аппроксимационной схемы.** При исследовании свойств решений системы (1) одним из мощных методов является аппроксимационный подход, при котором исходная непрерывная система заменяется дискретным аналогом. На основании свойств решений дискретной системы при определенных предположениях можно сделать вывод о наличии требуемых свойств и у непрерывной системы. Применим аппроксимационный подход к исследованию проблемы канонических форм для линейных нестационарных систем наблюдения на основе аппроксимации операторного уравнения (10).

Так как вопрос о разрешимости операторного уравнения (10) относительно $v\in C(T,R^n)$ при заданной паре $(A,c)\in\Sigma$ эквивалентен существованию канонической формы Фробениуса $(A^0,\ c^0)$ для пары $(A,\ c)$ относительно группы G, то аппроксимационную схему нахождения канонической формы будем основывать на исследовании разностной аппроксимации уравнения $V^n(A,c,v)=(A,0,v)$.

Введем необходимые понятия и обозначения. Пусть $h>0$ – шаг дискретизации. Всюду в дальнейшем считаем, что шаг дискретизации $h$ связан с целым числом $M>0$ соотношением $h=(t_1-t_0)/M$. Положим $\tau_i=t_0+ih,\ i=(0,1,\ldots,M),\ T_M=\{\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_M\}$ и обозначим через $x_h(\tau)$ – $n$-вектор функцию дискретных аргументов $\tau\in T_M$ и $h$, а множество всех таких функций с нормой $\|x_h\|_1=\max_{\tau\in T_M}\|x_h(\tau)\|$ обозначим через $\Omega_h(T_M)$. Далее при каждом $h>0$ через $(B,\ a)_h$ будем записывать дискретную пару $\{(B_h(\tau),\ \tau\in T_{M-1}),\ (a_h(\tau),\ \tau\in T_M)\}$, состоящую из $(n\times n)$-матричной функции $B_h(\phi)$ и $n$-вектор функции строки $a_h(\phi)$. Множество всех таких пар $(B,\ a)_h$ с нормой $\|(B,a)_h\|_2=\max_{\tau\in T_{M-1}}\left\|B_h(\tau)\right\|_{(n\times n)}+\max_{\tau\in T_M}\left\|a_h(\tau)\right\|$ обозначим через $\Sigma_h(T_{M-1},T_M)$.

Введем множество $\Sigma_h=\Sigma_h(T_{M-1},T_M)\times\Omega_h(T_M)$, элементами которого являются тройки $(B,\ a,\ w)_h$ с нормой

$$\|(B,a,w)_h\|_3=\|(B,a)_h\|_2+\max_{\tau\in T_{M-1}}\|w_h(\tau)\|.$$

Здесь $(B,a)_h\in\Sigma_h(T_{M-1},T_M)$, а $w=w_h\in\Omega_h(T_{M-1})$. Для каждого $h>0$ заменим оператор $V(A,c,v)(t)=$

$$=\left(A(t),\ \dot c(t)+c(t)A(t)-v_1(t)c(t),\ \varphi(v\ (t))\right),\quad t\in T$$

разностным оператором $V_h:\Sigma_h\to\Sigma_h$, действующим по правилу $V_h(A,c,v)(\tau)=$

$$=(\ A(\tau),\ h^{-1}(c(\tau+h)-c(\tau))+$$
$$+c(\tau)A(\tau)-v_1(\tau)c(\tau),\varphi(v(\tau))).\qquad(12)$$

Область определения оператора $V_h$ совпадает с множеством $\Sigma_h$. Ясно, что на каждом элементе $(B,\ a,\ w)_h$ из $\Sigma_h$ по индукции можно определить $k$-тую степень $V_h^k:\Sigma_h\to\Sigma_h$ оператора $V_h$: $V_h^k(B,a,w)=V_h(V_h^{k-1}(B,a,w))=$ $=V_h(B,\ q^h_{n-k+1},\ \varphi^{k-1}(w))=(B,\ q^h_{n-k},\varphi^k(w))$,

где $k\in(1,2,\ldots,n)$ и $q_n^h(\tau)=a(\tau),\ q^h_{n-k}(\tau)=$

$$=h^{-1}\left(q^h_{n-k+1}(\tau+h)-q^h_{n-k+1}(\tau)\right)+$$
$$+q^h_{n-k+1}(\tau)B_h(\tau)-w_k(\tau)a(\tau).$$

Предлагаемая ниже аппроксимационная схема построения канонической формы Фробениуса для непрерывной системы наблюдения $(A,\ c)$ существенным образом основывается на исследовании разностного уравнения

$$V_h^n(A,c,w)(\tau)=(A(\tau),\ 0,\ w(\tau)),\ \tau\in T_{M-n}\quad(13)$$

Отметим, что при заданной паре $(A,\ c)\in$ F решение уравнения (10) принадлежит банахову пространству $C(T,R^n)$, в то время как решение разностного уравнения (13) при заданном $h>0$ принадлежит конечномерному пространству $\Omega_h(T_M)$.

Будем говорить, что на элементе $(A,c,v)\in D_n$ выполнено условие аппроксимации оператора $V^n$ с помощью последовательности разностных операторов $V_h^n$, если

$$\lim_{h\to 0}\left\|V_h^n(A,c,v)-(V^n(A,c,v))_h\right\|_3=0.$$

По заданной последовательности скалярных дискретных функций $\{\xi_h(\tau_i),\ \tau_i\in T_M\}$, $h=(t_1-t_0)/M,\ M\in(1,2,3,\ldots)$ определим последовательность ломаных Эйлера, т.е. функций

$$r_M(t)=\left\{\frac{(t-\tau_i)\xi_h(\tau_i)+(\tau_{i+1}-t)\xi_h(\tau_{i+1})}{\tau_{i+1}-\tau_i}\right.,$$

$$t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],\ i \in (0,1,\dots, M-1) \},$$

$$t \in T = [t_0, t_1] = \bigcup_{i=1}^{M-1} [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Ясно, что при каждом положительном целом $M$ функции $r_M(t),\ t \in T$ принадлежат $C(T,R)$. Говорят, что последовательность $r_M(t),\ t \in T$ сходится в себе, если для любого $e>0$ существует такое положительное целое число $M_0$, что для всех $M>M_0$ имеет место неравенство $\max_{t\in T} |r_M(t) - r_{M+1}(t)| < \varepsilon$.

Так как пространство $C(T,R)$ с равномерной нормой полно, то предельная функция $r(t)$ для последовательности $\{ r_M(t),\ t \in T \}$ непрерывна.

Нетрудно заметить, что последовательность $\{r_M(t),\ t \in T\}$ сходится в себе при $h \to 0$ тогда и только тогда, когда дискретные скалярные функции $\xi_h(\tau_i),\ \tau_i \in T_M,\ h = (t - t_0)/M$ при $h \to 0$ сходятся в себе равномерно относительно $i \in (0,1,\dots,M)$, т.е. если для любого $e>0$ существует такое положительное число $M_0$, что для всех $M>M_0$ имеет место неравенство $\max_{i\in(0,1,\dots,M-1)} |\xi_h(\tau_i) - \xi_h(\tau_{i+1})| < \varepsilon$. Следовательно, если дискретные скалярные функции $\xi_h(\tau_i),\ \tau_i \in T_M,\ h = (t_1 - t_0)/M$ при $h \to 0$ сходятся в себе равномерно относительно $i \in (0,1,\dots,M)$, то предельная функция

$$\xi(t) \doteq \lim_{h\to 0, \tau_i \to t} \xi_h(\tau_i),\ t \in T$$

принадлежит $C(T,R)$.

Для иллюстрации построения разностного операторного уравнения рассмотрим пример системы наблюдения (1), (2) второго порядка с парой $(A, c)$ вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix},\ c(t) = (0 \quad 1),$$
$$t \in T = [t_0, t_1], \tag{14}$$

где $a_{ij}(t)$ – непрерывные функции на $T, i, j \in (1,2)$. Заметим, что система (14) с точки зрения построения канонической формы Фробениуса представляет собой общий случай системы наблюдения второго порядка, так как в силу леммы 2 несложно преобразовать любую пару $(A,c)$ с непрерывно дифференцируемой функцией $c(t)$ к виду (14).

Итак, оператор $V(A,c,v)$ в нашем случае имеет вид:

$$V(A,c,v)(t) = ( A(t),\ \dot c(t) + c(t)A(t) - $$
$$- v_1(t) p(t),\ \varphi(v(t)) ) =$$
$$= ( A(t),\ (a_{21}(t),\ a_{22}(t) - v_1(t)),\ (v_2(t), v_1(t)) ).$$

Область определения оператора $V^2$ состоит из таких троек $(A,c,v)$, у которых функции $a_{21}(t)$ и $a_{22}(t)$-$v_1(t)$ непрерывно дифференцируемы на $T$. На тройке $(A,c,v)$ из области определения оператора $V^2$ имеем: $V^2(A,c,v)(t) =$

$$= \left( A(t),\ \begin{pmatrix} \dot a_{21}(t) + a_{11}(t)a_{21}(t) + \\ + a_{21}(t)a_{22}(t) - a_{21}(t)v_1(t), \\ \dfrac{d(a_{22}(t) - v_1(t))}{dt} + a_{12}(t)a_{21}(t) + \\ + a_{22}^2(t) - a_{22}(t)v_1(t) - v_2(t) \end{pmatrix},\ (v_1(t), v_2(t)) \right).$$

Анализ уравнения

$V^2(A,c,v)(t) = = (A(t),\ 0,\ v(t)),\ t \in T$ показывает, что оно разрешимо относительно функции $v(t)$ тогда и только тогда, когда

$$a_{21}(t) \neq 0,\ t \in T.$$

Решение этого уравнения можно записать в явном виде:

$$v_1(t) = \frac{\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)} + a_{11}(t) + a_{22}(t),$$

$$v_2(t) = -\frac{d\left( \dfrac{\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)} + a_{11}(t) \right)}{dt} - a_{22}(t)\frac{\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)} -$$
$$- a_{22}(t)a_{11}(t) + a_{12}(t)a_{21}(t).$$

Из вышеизложенного следует

**Лемма 6.** *Для пары $(A,c)$ вида (14) каноническая форма Фробениуса существует тогда и только тогда, когда $a_{21}(t) \neq 0,\ t \in T$ и функции $a_{21}(t),\ \dfrac{\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)} + a_{11}(t)$ непрерывно дифференцируемы на $T$. Функции $\alpha_0(t),\ \alpha_1(t)$, определяющие матрицу $A^0(t)$ в форме Фробениуса, соответственно равны: $a_0(t)=v_2(t),\ a_1(t)=v_1(t)$.*

Замечание 1. Пара $(A, c)$ вида (14) принадлежит множеству $\Re_2^0$ (см. [2]) тогда и только тогда, когда

$$a_{21}(t) \neq 0,\ t \in T;\ a_{21} \in C^1,\ a_{22} \in C^1,$$
$$\frac{\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)} + a_{11}(t) \in C^1. \tag{15}$$

Легко заметить, что условия леммы 6 на матрицу А слабее условий (15).

Для $h>0$ рассмотрим разностный оператор $V_h(A,c,v)$ для оператора $V(A,c,v)$. Имеем:

$$V_h(A,c,v)(\tau) = \begin{pmatrix} A(\tau),\ h^{-1}(c(\tau+h) - c(\tau)) + \\ + c(\tau)A(\tau) - v_1(\tau)c(\tau),\ \varphi(v(\tau)) \end{pmatrix} =$$
$$= (A(\tau),\ (a_{21}(\tau),\ a_{22}(\tau) - v_1(\tau)),\ (v_2(\tau),\ v_1(\tau))).$$

Вторая итерация оператора $V_h(A,c,v)$ выражается следующим образом:

$$V_h^2(A,c,v)(\tau)=$$

$$\left(A(\tau),\ \begin{pmatrix} h^{-1}\begin{pmatrix}(a_{21}(\tau+h)-a_{21}(\tau))+\\ +a_{21}(\tau)a_{11}(\tau)+\\ +a_{21}(\tau)a_{22}(\tau)-\\ -a_{21}(\tau)v_1(\tau)\end{pmatrix}, \\ h^{-1}\begin{pmatrix}a_{22}(\tau+h)-v_1(\tau+h)-\\ -a_{22}(\tau)+v_1(\tau)\end{pmatrix}+\\ +a_{21}(\tau)a_{12}(\tau)+a_{22}^2(\tau)-\\ -a_{22}(\tau)v_1(\tau)\end{pmatrix} - v_2(\tau)\right),$$

$\tau\in T_{M-2.}$

Итак, для определения функций $v_1^h$ и $v_2^h$ имеем разностное уравнение:

$$V_h^2(A,c,v^h)(\tau)=(A(\tau),\ 0,\ v^h(\tau)),\ ф\in T_{M-2}.$$

Несложно заметить, что решением этого уравнения являются следующие функции дискретного аргумента:

$$v_1^h(\tau)=a_{11}(\tau)+a_{22}(\tau)+\frac{a_{21}(\tau+h)-a_{21}(\tau)}{ha_{21}(\tau)},\quad (16)$$

$$v_2^h(\tau)=a_{21}(\tau)a_{12}(\tau)-a_{22}(\tau)a_{11}(\tau)-$$
$$-\frac{a_{22}(\tau)(a_{21}(\tau+h)-a_{21}(\tau))}{ha_{21}(\tau)}-$$
$$-h^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{a_{21}(\tau+2h)-a_{21}(\tau+h)}{ha_{21}(\tau+h)}+a_{11}(\tau+h)-\\ -\left(\dfrac{a_{21}(\tau+h)-a_{21}(\tau)}{ha_{21}(\tau)}+a_{11}(\tau)\right)\end{pmatrix}.\quad (17)$$

Выражения для $v_1^h(\tau)$ и $v_2^h(\tau)$ справедливы для любых $h>0$, $h=(t_1-t_0)/M$, $\tau\in T_{M-2}$.

Предположим, что дискретные скалярные функции

$$v_1^h(\tau_i),\ v_2^h(\tau_i),\ \tau_i\in T_{M-2},\ h=(t_1-t_0)/M$$

при $h\to 0$ сходятся в себе равномерно относительно $i\in(0,1,\dots,M)$. Следовательно, предельные функции

$$v_1(t)\doteq\lim_{h\to0,\tau_i\to t}v_1^h(\tau_i)=a_{11}(t)+a_{22}(t)+\frac{\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)},$$

$$v_2(t)\doteq\lim_{h\to0,\tau_i\to t}v_2^h(\tau_i)=a_{21}(t)a_{12}(t)-$$

$$-a_{22}(t)a_{11}(t)-\frac{a_{22}(t)\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)}-\frac{d\left(\dfrac{\dot a_{21}(t)}{a_{21}(t)}+a_{11}(t)\right)}{dt}.$$

принадлежат $C(T,R)$, что согласуется с результатами леммы 6.

Следующая теорема устанавливает связь между разрешимостью разностного уравнения

$$V_h^n(A,c,v^h)(\tau)=(A(\tau),\ 0,\ v^h(\tau)),\ \tau\in T_{M-n}\quad (18)$$

и существованием канонической формы Фробениуса для пары $(A,\ c)$.

**Теорема 2.** *Пусть для пары $(A,c)$ из $\Sigma$ существует такое $h^0>0$, что при всех $h<h^0$ разностное уравнение (18) имеет решение*

$$v^h(\tau),\ \tau\in T_{M-n}$$

*которое равномерно сходится в себе. Тогда пара $(A,\ c)$ обладает канонической формой Фробениуса $(A^0,\ c^0)$, определяемой функциями*

$$\alpha_{n-j}(t)=\lim_{h\to0,\tau_i\to t}v_j^h(\tau_i),\ j\in(1,2,\dots,n),\ t\in T.$$

Доказательство. Так как для пары $(A,\ c)$ разностное уравнение (18) имеет решение $v^h(\tau)$, $\tau\in T_{M-n}$, то определены $n$-вектор функции столбцы

$$g_0^h(\tau)=c(\tau),\ g_k^h(\tau)=h^{-1}(g_{k-1}^h(\tau+h)-g_{k-1}^h(\tau))+$$
$$+g_{k-1}^h(\tau)A(\tau)-v_k^h(\tau)c(\tau),$$

причем для $g_1^h(\tau)$ имеем соотношение

$$h^{-1}(g_1^h(\tau+h)-g_1^h(\tau))=-g_1^h(\tau)A(\tau)+$$
$$+v_1^h(\tau)c(\tau),\ \tau\in T_{M-n}.$$

Обозначим

$$v(t)=\lim_{h\to0,\tau\to t}v^h(\tau),\quad g(t)=\lim_{h\to0,\tau\to t}g^h(\tau).$$

Поскольку $v^h(\tau)$, $\tau\in T_{M-n}$ равномерно сходится в себе, то функции $v(t)$ и $g(t)$ непрерывны на $T$ и, следовательно, существует предел

$$\lim_{h\to0,\tau\to t}h^{-1}(g_1^h(\tau+h)-g_1^h(\tau))=$$
$$=\lim_{h\to0,\tau\to t}(v_1^h(\tau)c(\tau)-g_1^h(\tau)A(\tau))\doteq$$
$$\doteq v_1(t)c(t)-g_1(t)A(t),\ t\in T,$$

т.е. $n$-вектор функция $g_1(t)$ непрерывно дифференцируема на $T$. По индукции легко показать, что функции $g_i(t)$, $i\in(2,3,\dots,n)$ непрерывно дифференцируемы на $T$. Из вышеизложенного следует, что элемент $(A,\ c,\ v)$ принадлежит $D_n$ и верно равенство

$$V^n(A,c,v)(t)=(A(t),\ 0,\ v(t)),\ t\in T.$$

В силу леммы 1 пара $(A,\ c)$ имеет каноническую форму Фробениуса $(A^0,\ c^0)$ с функциями $\alpha_{n-j}(t)=v_j(t)$, $t\in T$. Теорема доказана.

Таким образом, последовательность разностных операторов $V_h^n$ аппроксимирует на любом элементе $(A,c,v)\in D_n$ оператор $V^n$, т.е. имеет место соотношение

$$\lim_{h\to0}\left\|V_h^n(A,c,v)-(V^n(A,c,v))_h\right\|_3=$$

$$=\lim_{h\to0}\max_{\tau\in T_{M-1}}\left\|\begin{matrix}h^{-1}(q_1^h(\tau+h)-q_1^h(\tau))+\\ +q_1^h(\tau)A(\tau)-\dot q_1(\tau)-q_1(\tau)A(\tau)\end{matrix}\right\|=0.$$

Отметим что, исследовать разрешимость разностного уравнения (18) и найти все его

Отметим что, исследовать разрешимость разностного уравнения (18) и найти все его решения удается далеко не всегда. Для изучения разностной аппроксимации уравнения (10) оказывается полезной следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть для некоторого* $G \in \mathrm{G}$ *системы (A,c) и (B,d) из* $\sum$ *связаны равенством*

$$G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t) = B(t), \quad c(t)G(t) = d(t), \; t \in T. \tag{19}$$

Тогда при достаточно малом

$$h>0, \; h = (t_1 - t_0)/M$$

верно соотношение

$$G^{-1}(\tau+h)(E + hA(\tau))G(\tau) = = E + hB(\tau) + \mathrm{O}(\tau,h), \; \tau \in T_{M-1}, \tag{20}$$

где $(n\times n)$-матрица $\mathrm{O}(\phi,h)$ обладает свойством

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\mathrm{O}(\tau,h)\|_{(n\times n)}}{h} = 0, \; \tau \in T_{M-1}, \tag{21}$$

а $\|\mathrm{O}(\tau,h)\|_{(n\times n)}$ – норма матрицы $\mathrm{O}(\phi,h)$.

Доказательство. Рассмотрим (19) на множестве точек $T_M$. Так как $h>0$ можно выбирать достаточно малым и $G \in \mathrm{G}$, то из (19) с учетом соотношения

$$G^{-1}(\tau+h) = G^{-1}(\tau) + h\dot{G}^{-1}(\tau) + \mathrm{O}_1(\tau,h),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\mathrm{O}_1(\tau,h)\|_{(n\times n)}}{h} = 0,$$

получим $hG^{-1}(\tau)A(\tau) + G^{-1}(\tau+h) - G^{-1}(\tau) - \mathrm{O}_1(\tau,h) = hB(\tau)G^{-1}(\tau)$. Из последнего равенства получаем выражение

$$G^{-1}(\tau+h)(E + hA(\tau))G(\tau) = = E + hB(\tau) + \mathrm{O}_1(\tau,h)G(\tau) + + h\left(G^{-1}(\tau+h) - G^{-1}(\tau)\right)A(\tau))G(\tau),$$

которое эквивалентно формуле

$$G^{-1}(\tau+h)(E + hA(\tau))G(\tau) = E + hB(\tau) + + \mathrm{O}(\tau,h), \; \tau \in T_{M-1}, \text{ где}$$

$$\mathrm{O}(\tau,h) = h^2\dot{G}^{-1}(\tau)A(\tau)G(\tau) + + \mathrm{O}_1(\tau,h)(E + hA(\tau))G(\tau).$$

Легко видеть, что $\lim_{h\to 0}\frac{\|\mathrm{O}(\tau,h)\|_{(n\times n)}}{h} = 0$, $\tau \in T_{M-1}$. Теорема доказана.

Анализ теоремы 3 показывает, что если пара $(A, c)$ имеет каноническую форму Фробениуса $(A^0, c^0)$, то их дискретные аналоги связаны соотношением

$$G^{-1}(\tau+h)(E + hA(\tau))G(\tau) = = E + hA^0(\tau) + \mathrm{O}(\tau,h), \; \tau \in T_{M-1}, \tag{22}$$

которое позволяет при определенных условиях выразить решения разностного уравнения (13) через дискретные функции, определяющие каноническую форму для линейной дискретной системы наблюдения

$$x_h(\tau+h) = (E + hA(\tau))x_h(\tau), \quad \tau \in T_{M-1} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{M-1}\}, \tag{23}$$

$$\tilde{y}(\tau) = c(\tau)x_h(\tau), \; \tau \in T_M = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_M\}. \tag{24}$$

Здесь $x_h(\phi)$ – $n$-вектор столбец состояния системы (23) в момент $\phi \in T_M$; а $\tilde{y}(\tau)$, $\tau \in T$ – выходная функция системы (23), (24).

**Литература**

1. *Гайшун И.В., Астровский А.И.* Описание множества равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем // Докл. АН Беларуси. 1996. Т.40, №5. с. 5–8.
2. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1998. №7. с. 3–13.
3. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Управляемость линейных нестационарных систем в классе обобщенных функций конечного порядка // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. №2. с 24–30.
4. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1999. 409 с.
5. *Астровский А.И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения и хессенбергова наблюдаемость // Докл. Академии наук (РАН). Т. 383, №4, с. 439–442.
6. *Астровский А.И.* Хессенбергова наблюдаемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения: Тез. докладов Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений». Мн., 2001. С.21–22.
7. *Астровский А.И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом и хессенбергова наблюдаемость // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. Мн., 2001. Т. 10. с. 21–25.
8. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф,М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.