

Черняк А.А., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики БГПУ им. М.Танка,  
Кутырева А.А., студентка БГПУ им. М.Танка

## ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПАКЕТОВ В ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Преподавание математики в настоящее время переживает этап революционных перемен, связанных с появлением мощных компьютерных пакетов: MathCAD, Mathematica, Mathlab и т.д. Основной вопрос состоит в том, какое место должна занять компьютерная математика в структуре образовательного процесса.

В соответствии с положениями теории управления противоречие между традицией и инновацией может иметь семь качественно разных исходов: экспансия (когда инновация разрушает традицию), ассимиляция (уничтожение инновации традицией), аннигиляция (сопровождается взаиморазрушением), повтор (оппозиция традиции и инновации, когда они лишь укрепляются в собственном своеобразии), обмен (характеризуется лишь механическим суммированием, пространственно-временным сосуществованием традиционного и нового), несоответствия ни традиции, ни инновации современной образовательной ситуации и развитие, которое предполагает согласование традиции с инновацией, сопровождаемое эффектом возникновения качественно нового явления [1].

Безусловно, для повышения эффективности обучения основам высшей математики единственно приемлемым исходом синтеза компьютерной и классической математики является развитие. Сформулируем основные принципы такого синтеза.

1. Компьютерная математика не способна полностью исключить традиционные методы в преподавании, однако призвана сделать его более эффективным и доступным. Она всего лишь инструмент, позволяющий:

- сосредоточить внимание студента на логике методов и алгоритмов, освобождая от необходимости освоения громоздких и труднозапоминающихся вычислительных приемов и процедур;
- постигать принципы алгоритмизации и программирования, поскольку решение компьютерных задач связано с написанием программных блоков;

- способствовать повышению эффективности усвоения материала благодаря визуализации основных понятий и некоторых этапов решения задач;

- заложить основы экономико-математического моделирования как основного метода исследования социально-экономических процессов.

2. В процессе обучения математике должны использоваться образовательные компьютерные технологии, но без ущерба математически строгому изложению теории.

3. Используемый пакет компьютерной математики должен обладать дружелюбным интерфейсом и универсальными возможностями.

Какие же преимущества дает применение компьютерных пакетов в преподавании общего курса высшей математики? Продемонстрируем основные моменты, разделяя предусматриваемые образовательными стандартами темы на несколько типов, хотя такое разграничение достаточно условно.

1. Существует класс задач, в которых визуализация отдельных этапов решения существенно упрощает его и способствует более эффективному усвоению материала (построение графиков при изучении непрерывных функций, построение поля направлений интегральных кривых ДУ, нахождение суммы ряда и т.д. [2]). Причем решения некоторых задач могут быть комплексными, когда отдельные этапы рассматриваются «вручную», а наиболее трудоемкие – на компьютере. В качестве характерного примера рассмотрим задачу исследования сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ заданного рекуррентно так: } a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}.$$

На первом этапе индукцией по  $n$  доказывается, что  $a_{n+2} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Таким образом, исходный ряд мажорируется сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ , сумма  $n$ -го остатка которого равна

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \dots = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Теперь пришло время «запустить» алгоритм в MathCAD приближенного вычисления суммы ряда с заданной точностью  $10^{-7}$ :

```

a1 ← 1
a2 ← 1
S1 ← 1
S := S2 ← a1 + a2    rows(S) = 47
for n ∈ 1...100     S_rows(S)-1 = 3.359885665
|
| a_{n+2} ← (a_{n+1} · a_n) / (a_{n+1} + a_n)
|
| S_{n+2} ← S_{n+1} + a_{n+2}
|
| break if 3 · (2/3)^{n-1} < 10^{-7}
|
S
    
```

2. Применение компьютерного пакета позволяет лучше усвоить некоторые основные понятия (производная, определенный интеграл), представление о которых при обычном изображении на бумаге (или доске) не столь наглядно, как при использовании анимационных средств компьютерного пакета. Например, применение анимации позволяет более эффективно усвоить понятие определенного интеграла и сумм Дарбу, т.к. благодаря использованию анимации можно наблюдать сам процесс «сближения» верхней и нижней сумм Дарбу с ростом числа промежутков разбиения [2, с.238–239].

3. Решение некоторых задач «вручную» достаточно трудоемкий, а иногда и практически невыполнимый процесс. Обычно это задачи с жестким алгоритмом решения, где основную познавательную ценность представляет сам алгоритм, а не процесс решения, который одинаков для всех задач данного класса. Такие работы можно быстро и эффективно выполнить на компьютере (общая задача условной оптимизации, нахождение интервалов монотонности, численного решения задачи Коши, проверка их решения на устойчивость по Ляпунову и асимптотическую устойчивость [2, 3]). В качестве характерного примера рассмотрим следующую задачу. В  $n$ -мерном пространстве заданы две плоскости, соответственно проходящие через точки  $A = (3, 1, 2, 1, 3)$  и  $B = (2, 2, -1, -1, -2)$ ,

соответственно параллельно системам векторов  $V = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2\}$  и  $W = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ , где  $\bar{p}_1 = (4, 0, 1, 1, 2)$ ,  $\bar{p}_2 = (7, 3, 2, 0, 1)$ ,  $\bar{s}_1 = (2, 1, 0, 1, 1)$ ,  $\bar{s}_2 = (0, 0, 1, 1, -2)$ . Требуется найти две точки, принадлежащие этим плоскостям, расстояние между которыми минимально. Алгоритм решения этой задачи с помощью MathCAD следующий:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad A := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$p_{1,i} := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad p_{1,2} := \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_{1,i} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_{1,2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := A + \sum_{i=1}^2 t_i \cdot p_{1,i} \quad g(r) := B + \sum_{i=1}^2 r_i \cdot s_{1,i}$$

$$I := 1..2 \quad i_i := 0 \quad r_{ib} := 0$$

$$\text{Given } |f(t) - g(r)| = 0 \quad v := \text{Miner}(t, r)$$

$$v^r = \begin{bmatrix} (-1.921) & (-0.027) \\ 0.73 & (-0.198) \end{bmatrix}$$

$$g(v_2) = \begin{pmatrix} 1.946 \\ 1.973 \\ -1.198 \\ -1.225 \\ -1.632 \end{pmatrix} \quad f(v_1) = \begin{pmatrix} 0.426 \\ 3.189 \\ 1.539 \\ -0.921 \\ -0.111 \end{pmatrix}$$

$$|f(v_1) - g(v_2)| = 3.699$$

4. Работа с компьютерным пакетом способствует усвоению принципов алгоритмизации и программирования, так как при работе с пакетом для решения задачи необходимо разбить все выполняемые действия на какие-то этапы, т. е. самостоятельно сформулировать алгоритм решения той или иной задачи. В качестве характерного примера рассмотрим задачу приближенного вычисления

суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  с точностью  $10^{-4}$ .

Пусть также требуется вычислить суммы первых  $10^4$  положительных и первых  $10^4$  отрицательных членов этого ряда. Алгоритм решения задачи с помощью MathCAD следующий. Вычислим сумму ряда с точностью  $10^{-4}$ :

$$a(n) := \frac{(-1)^n \cdot \ln(n)}{n}$$

$$S := \begin{cases} n \leftarrow 1 \\ S \leftarrow 0 \\ \text{while } |a(n+1)| > 10^{-4} \\ S \leftarrow S + a(n) \\ n \leftarrow n+1 \\ S \leftarrow S + a(n) \end{cases} \quad S = 0.1598189$$

Вычислим теперь суммы  $S_p$  и  $S_{on}$  соответственно первых  $10^4$  положительных и отрицательных членов исходного ряда:

$$S_p := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..10000 \\ \text{continue if } a(n) < 0 \\ S \leftarrow S + a(n) \\ S \end{cases}$$

$$S_n := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..10000 \\ \text{continue if } a(n) < 0 \\ S \leftarrow S + a(n) \\ S \end{cases}$$

$$S_p = 21.25157947 \quad S_{on} = -21.09125007$$

$$S_p + S_{on} - S = 0.0005105$$

5. Применение пакета позволяет решать параметрические задачи с последующим анализом поведения модели в зависимости от значения параметров. В качестве примера рассмотрим задачу вычисления сумм  $k$ -х. степеней членов арифметической прогрессии с разностью  $d$  и первым членом 1 при  $k=1$ ,  $k=2$ . Программный модуль, формирующий эти суммы, выглядит так:

$$f(m, d) := \begin{cases} \text{for } n \in 1..10000 \\ a_{k-1} \leftarrow \sum_{n=1}^m (1 + n \cdot d)^k \\ a \end{cases}$$

Теперь можно использовать функцию  $f(m, d)$  для вычислений искомым сумм:

$$f(m, d) \rightarrow \left[ \begin{array}{l} m + \frac{1}{2}d(m+1)^2 - \frac{1}{2}(m+1)d \\ m + d(m+1)^2 - (m+1)d + \frac{1}{3}d^2(m+1)^3 - \frac{1}{2}d^2(m+1)^2 + \frac{1}{6}d^2(m+1) \end{array} \right]$$

$$f(m, d) \text{ factor} \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}m(dm + 2 + d) \\ \frac{1}{6}m(6 + 6 \cdot d \cdot m + 6 \cdot d + 2 \cdot d^2 \cdot m^2 + 3 \cdot d^2 \cdot m + d^2) \end{array} \right]$$

$$f(m, d) \text{ expand} \rightarrow \left[ \begin{array}{l} m + \frac{1}{2}d \cdot m^2 - \frac{1}{2}dm \\ m + d \cdot m^2 + d \cdot m + \frac{1}{3}d^2m^3 + \frac{1}{2}d^2m^2 + \frac{1}{6}d^2m \end{array} \right]$$

$$f(m, d) \text{ collect, } m \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}d \cdot m^2 + (\frac{1}{2} \cdot d + 1) \cdot m \\ \frac{1}{3} \cdot d^2 \cdot m^3 + (\frac{1}{2} \cdot d^2 + d)m^2 + (\frac{1}{6} \cdot d^2 + d + 1)m \end{array} \right]$$

$$f(m, d) \text{ substitute, } m = 10, d = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 175 \\ 3805 \end{pmatrix}$$

$$f(m, d) \text{ substitute, } m = 10, d = r \rightarrow \begin{pmatrix} 10 + 55 \cdot r \\ 10 + 110 \cdot r + 385 \cdot r^2 \end{pmatrix} \quad f(10, 3) = \begin{pmatrix} 175 \\ 3805 \end{pmatrix}$$

6. Решение многих математических и экономических задач с использованием компьютерного пакета не только закладывает основы экономико-математического моделирования, но и демонстрирует возможности экспорта данных из компьютерного пакета в другие программы. Большое число разнообразных прикладных задач, подтверждающих этот тезис, можно найти в [3].

Кроме перечисленного выше, использование систем компьютерной математики формирует навыки работы с компьютером вообще и применения компьютерного пакета в частности. При том описание используемых средств MathCAD следует давать параллельно изложению математической теории, что позволит студентам постепенно усваивать возможности пакета без отрыва от конкретного математического контекста.

Каким же должно быть учебное пособие, реализующее органичное сочетание компьютерной и классической математики?

1. Содержание теоретического материала учебника должно соответствовать государственным образовательным стандартам, а его структура быть ориентированной на использование пакетов компьютерной математики. Благодаря такой структуре отпадает необходимость в изложении громоздких методов и приемов интегрирования, дифференцирования, решения дифференциальных уравнений, обращения матриц и т.д. — подобные процедуры можно «доверить» компьютеру. Тем самым разгружается содержательная часть книги, а внимание студента акцентируется на логике понятий и методов.

2. Учебник должен предполагать многоуровневое постижение основ высшей математики, при котором варьируется степень

подробности и глубины изучения предмета. Каждая глава должна сопровождаться практическим материалом, также дифференцированным по уровням. Творческий уровень должен быть представлен теоретическими задачами, которые, с одной стороны, позволяют дополнить теорию, а с другой – указать ее тонкие моменты.

Следующий уровень – практические задачи. Они должны быть доступны среднему студенту и предназначены для приобретения практических навыков в освоении алгоритмов и методов, доступных для ручного счета и обработки.

Задачи третьего уровня должны быть компьютерными, ориентированными на использование пакетов компьютерной математики и недоступными для ручной обработки. Каждый блок таких задач должен содержать однотипные примеры, сопровождаемые алгоритмами решения с помощью операторов и функций пакета компьютерной математики.

3. Что касается выбора компьютерного пакета для учебного пособия по математике, то MathCAD выгодно отличается от других пакетов возможностью свободно компоновать рабочий лист и относительной легкостью изучения. Так же, как с карандашом в руке решается задача на листе бумаги, можно оформить и соответствующий MathCAD-документ. Если некоторое время не возникает необходимости работать с MathCAD, то впоследствии навыки пользования пакетом легко восстанавливаются (тогда как в других пакетах компьютерной математики используется очень сложный синтаксис, который быстро забывается, если не работать с этим пакетом постоянно). Кроме того, MathCAD - это универсальная, а не специализированная математическая среда.

Перечисленные принципы реализованы в книгах [2-3], допущенных Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебных пособий для студентов инженерно-экономических специальностей высших учебных заведений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин В.А. Организационные типы современной культуры: Автореф. докт. дис. по культурологии: 24.00.01/Государственное образовательное учреждение «Международная академия бизнеса и банковского дела». М., 1998.
2. Черняк А.А., Доманова Ю.А., Черняк Ж.А. Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс. Санкт-Петербург: БХВ, 2004.
3. Черняк А.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. Математика для экономистов на базе MathCAD. Санкт-Петербург: БХВ, 2003.

## РЕЗЮМЕ

Формулируются основные принципы синтетического применения систем компьютерной математики в преподавании общего курса высшей математики. Эффективность такого подхода обосновывается и демонстрируется на базе компьютерного пакета MathCAD.

## SUMMARY

The main principles of the synthetic use of mathematical computer systems in teaching higher mathematics are presented. The effectiveness of this approach is proved and demonstrated on the basis of MathCAD computer software.