ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЫНКА

Кузнецов В.П.

1. Постановка задачи

Известный классик Адам Смит рассматривал рынок, как саморегулирующуюся систему на основе свободных цен, складывающихся под воздействием спроса и предложения. Эти экономические регуляторы он назвал «невидимой рукой», т.е. стихийно действующими объективными экономическими законами. С современных позиций общей теории управления и кибернетики такую систему следует рассматривать как автоматическую или систему автоматического управления (*САУ*), применяя для ее описания и исследования математический аппарат и понятия теории автоматического управления. Такой подход при анализе экономических явлений стал в последнее время применяться все шире [1].

При построении динамической модели рынка мы предлагаем использовать три фундаментальных принципа теории автоматического управления:

1. Любая *САУ* состоит из двух взаимодействующих объектов: объекта управления (*ОУ*) и управляющей части (*УЧ*).

2. *САУ* строится на базе принципа обратной связи, т.е. относится к классу кибернетических систем.

3. Управляющее воздействие, поступающее на *ОУ*, вырабатывается *УЧ* на основе информации, содержащейся в отклонении каких-либо величин, т.е. в *САУ* осуществляется принцип регулирования отклонения.

Такие динамические модели рынка, как дискретная (паутинообразная) и непрерывная в виде дифференциальных уравнений, основанные на равенстве спроса и предложения в любой момент времени, не дают четкой физической картины процесса саморегулирования. В этом отношении к ниже предлагаемым моделям наиболее близкой будет модель Эванса.

2. Общая структура динамической модели рынка

Будем полагать, что *ОУ* – рынок – характеризуется тремя основными величинами: спросом y, предложением x и ценой z, а движущей силой процесса регулирования будет разность между спросом и предложением. В этом случае структура динамической модели рынка получит вид, представленный на рисунке 1.

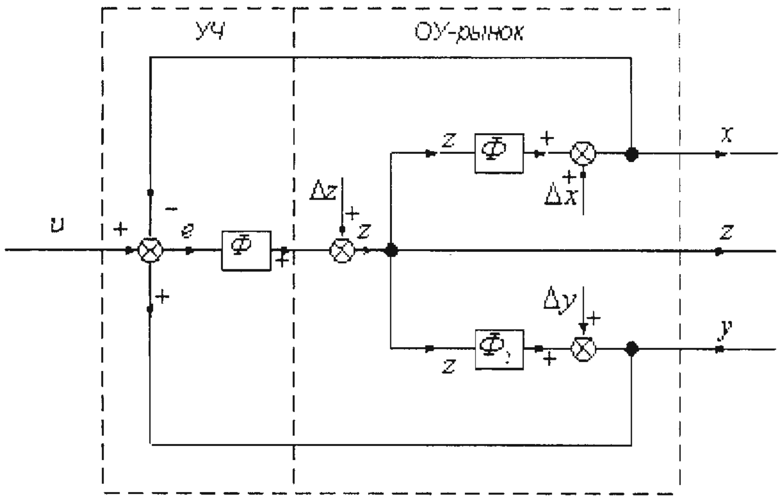

Рис. 1

Объект управления – рынок – включает два канала: канал предложения x и канал спроса y, которые связаны с ценой с помощью функциональных блоков Φ_1 и Φ_2. Переменная $e = \upsilon - (x - y)$ является отклонением между разностью предложения и спроса и некоторым внешним задающим (командным) воздействием. Если $\upsilon = 0$, то рынок является свободным, если $\upsilon \neq 0$, то рынок регулируемый. Цена z, воздействующая на спрос и предложение, определяется величиной отклонения e, а блок Φ_0 характеризует закон управления. Величины Δz, Δx, Δy — возмущения цены, предложения и спроса.

Цель системы управления: сделать отклонение e в установившемся режиме равным нулю или достаточно малым. Так, если $\upsilon = 0$ (свободный рынок), то при $e = 0$ спрос будет равен предложению, а в случае регулируемого рынка $\upsilon \neq 0$ при $e = 0$ разность предложения и спроса будет равна заданной величине. Предложенная структура объясняет саморегулирование рынка на основе сравнения предложения и спроса, что и является движущей силой в процессе регуляции, а управляющей переменной выступает цена.

Функциональные блоки Φ_0, Φ_1, Φ_2 могут быть различного вида, что позволяет моделировать линейные, нелинейные, непрерывные дискретные системы, а также, при необходимости, учитывать запаздывание. Рассмотрим эти блоки более подробно.

Блок Φ_0 характеризует закон регулирования $z = f_0(e)$. В теории регулирования наиболее распространены четыре основных линейных закона регулирования: пропорциональный (П-закон), интегральный (И-закон), пропорционально-интегральный (ПИ-закон), пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД-закон), каждый из которых характеризуется соответственно следующими передаточными функциями:

$$W_0(s) = k_0,\ W_0(s) = \frac{k_0}{s},\ W_0(s) = k_0 + \frac{k_0'}{s},$$

$$W_0(s) = k_0 + \frac{k_0'}{s} + k_0'' s, \qquad (1)$$

где s – комплексная переменная в преобразовании Лапласа.

Регулятор при П-законе является статическим, а при остальных трех — астатическим.

Блок Φ_0 может быть как непрерывного, так и дискретного (импульсного) типа. В первом случае будем иметь модель рыночного регулирования непрерывную, а во втором — дискретную.

Блоки Φ_1 и Φ_2 соответственно характеризуют каналы предложения и спроса. Самый простейший случай — когда они являются статическими и характеризуются обычными кривыми предложения и спроса $x = f_1(z)$, $y = f_2(z)$. При учёте динамических свойств каналов и связаны с дифференциальными уравнениями.

Законы (1) являются простейшими, хотя и наиболее употребительны. Связь z с отклонением e может быть более сложной, например, в виде нелинейного дифференциального или разностного уравнения. Возможно рассмотрение системы, как системы с запаздыванием, когда в блоках Φ_1 и Φ_2 вводятся элементы чистого запаздывания.

3. Линейная непрерывная динамическая модель рынка

В непрерывном случае система на рисунке 1 описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} &f_1\left(x, x^{(1)}, \ldots, z, z^{(1)}, \ldots, \Delta x\right) = 0, \\ &f_2\left(y, y^{(1)}, \ldots, z, z^{(1)}, \ldots, \Delta y\right) = 0, \\ &f_0\left(z, z^{(1)}, \ldots, e, e^{(1)}, \ldots, \Delta z\right) = 0, \\ &e = \upsilon + y - x, \end{aligned} \qquad (2)$$

где первые три являются дифференциальными уравнениями соответствующих порядков.

Будем полагать, что при

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \upsilon = 0$$

в системе существует установившийся режим $y = const$, $z = const$, $x = const$, $e = const$, и функции f_1, f_2, f_3 допускают разложение в ряд Тейлора. В этом случае обычным образом из (2) можно получить линеаризованную модель (далее — линейную), в которой блоки Φ_0, Φ_1, Φ_2 заменяются линейными и описываются линейными дифференциальными уравнениями или передаточными функциями, а координаты v, x, z, y, e следует рассматривать как отклонения от установившегося режима. Заметим, что $f_1(x,0,\ldots,z,0,\ldots,0) = 0$ и $f_2(x,0,\ldots,z,0,\ldots,0) = 0$ будут являться статистическими характеристиками каналов предложения и спроса (кривые предложения и спроса).

Итак, линеаризация (2) приведёт к следующей линейной модели системы:

$$\begin{aligned} &x = W_1 z + \Delta x, \quad y = W_2 z + \Delta y, \\ &z = W_0 e + \Delta z, \quad e = v + y - x, \end{aligned} \qquad (3)$$

где: $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_0(s)$ соответственно передаточные функции канала предложения, спроса и регулятора; x, y, z, Δx, Δy, Δz, v, e, — изображения соответствующих переменных.

Отметим, что уравнения (3) описывают поведение системы в окрестностях установившегося режима. Кроме того, статистический коэффициент передачи канала спроса $W_2(0) = -k_2$ будет всегда отрицательным (кривая спроса $y = f_2(z)$ имеет всегда отрицательный наклон).

Из (3) нетрудно получить модель Эванса. Полагаем в (3) $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \upsilon = 0$, $W_1 = k$, $W_2 = -k_2$, $W_0 = k_0 / s$, тогда получим $x = k_1 z$,

$y=-k_2 z$, $z=\frac{k_0}{s}e$. Из полученных выражений исключим x, y, e, тогда будем иметь $k_0 s z=-(k_1+k_2)z$. Переходя к оригиналам, получим дифференциальное уравнение относительно цены z: $z^{(1)}(t)=-\frac{k_1+k_2}{k_0}z(t)$. Следует помнить, что это — уравнение в отклонениях от установившегося значения цены.

4. Анализ установившихся режимов в линейной системе

Из (3) нетрудно найти связь координат x, y, z с внешними воздействиями υ, Δx, Δy, Δz:

$$z=\frac{1}{D}\Delta z+\frac{W_0}{D}\upsilon+\frac{W_0}{D}(\Delta y-\Delta x),$$

$$e=\frac{1}{D}\upsilon+\frac{1}{D}(\Delta y-\Delta x)+\frac{W_2-W_1}{D}\Delta z, \qquad (4)$$

$$x=W_1 z+\Delta x, \quad y=W_2 z+\Delta y,$$

где $D(s)=1+W_0(s)W_1(s)-W_0(s)W_2(s)$.

Будем считать далее, что $W_1(s)$, $W_2(s)$ являются статистическими звеньями, т.е. $W_1(0)=k_1$, $W_2(0)=-k_2$, где k_1, k_2 – статистические коэффициенты передачи. Передаточную функцию $W_0(s)$ будем полагать одной из вида (1). Оценим установившуюся ошибку в системе. Как известно [2], установившуюся ошибку в системе при $t\to\infty$ e_y можно определить по выражению:

$$e_y=\lim_{s\to 0} s\cdot e(s)= \qquad (5)$$

$$=\lim_{s\to 0} s\left[\frac{\upsilon(s)}{D(s)}+\frac{\Delta y(s)}{D(s)}-\frac{\Delta x(s)}{D(s)}-\frac{W_1(s)-W_2(s)}{D(s)}\Delta z(s)\right].$$

Пусть $W_1(0)=k_1$ — статистический регулятор, а воздействия v, Δy, Δx, являются единичными ступенчатыми функциями, изображение которых имеет вид $1/s$. В этом случае $D(0)=1+k_0(k_1+k_2)$, $W_1(0)-W_2(0)=k_1+k_2$. Модуль ошибки будет состоять из четырёх составляющих, соответственно для четырёх возмущений υ, Δx, Δy, Δz:

$$\left|e_y\right|=\frac{1}{1+k_0(k_1+k_2)}\left[1+1+1+(k_1+k_2)\right]. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что если $k_0(k_1+k_2)>>0$, то статистическая ошибка будет малой. Четвёртая составляющая (k_1+k_2) (возмущение цены) дает наибольшую ошибку, равную $(k_1+k_2)/[1+k_0(k_1+k_2)]$, которая при условии $(k_1+k_2)>>1$ будет приближенно равна $1/k_0$.

В случае астатистического регулятора $D(0)=\infty$ и при ступенчатых возмущениях координат υ, Δx, Δy, Δz установившаяся ошибка будет равна нулю. В случае свободного рынка $\upsilon=0$ это означает, что в установившемся режиме равновесная цена определится в точке пересечения кривых спроса и предложения.

5. Анализ устойчивости линейной системы в простейших случаях

Как известно, устойчивость замкнутой системы управления определяется видом корней характеристического уравнения, которое для данного случая будет:

$$1+W_0(s)W_1(s)-W_0(s)W_2(s)=0. \qquad (7)$$

Проведём анализ устойчивости в предположении, что регулятор имеет передаточную функцию $W_0(s)$, являющуюся функцией одной из (1), а $W_1(s)$ и $W_2(s)$ либо безинерционные звенья $W_1(s)=k_1$, $W_2(s)=-k_2$, либо апериодические

$$W_1(s)=k_1/(T_1 S+1), \quad W_2(s)=-k_2/(T_2 S+1).$$

Не трудно показать, что при любых $W_0(s)$ из четырех возможных (1), и при $W_1(s)=k_1, W_2(s)=-k_2$ характеристическое уравнение (7) будет первой степени с положительными коэффициентами; оно будет иметь отрицательный корень, а система будет устойчивой.

Пусть $W_1(s)$ и $W_2(s)$ — апериодические звенья. Нетрудно показать, что и в этом случае система будет всегда устойчивой при любой $W_0(s)$. Рассмотрим наиболее критичный с точки зрения устойчивости случай, когда $W_0(s)=K_0/s$. В этом случае (7) приобретает вид:

$$T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+$$
$$+(1+k_0k_1T_2+k_0k_2T_1)s+k_0(k_1+k_2)=0. \qquad (8)$$

Нетрудно показать, например, с помощью критерия Гурвица, что условия Гурвица при $T_1, T_2, k_0, k_1, k_2>0$ всегда выполняются, и система будет устойчивой.

Известно, что замкнутые системы с отрицательной обратной связью, начиная с третьего порядка, даже при положительных параметрах передаточных функций могут быть неустойчивыми. Проведенный анализ показывает, что рынок обладает относительно «сильной» устойчивостью, что легко объясняется параллельным соединением каналов спроса и предложения. Неустойчивость линейной непрерывной модели может возникнуть лишь при более высоких порядках передаточных функций $W_1(s)$ и $W_2(s)$.

Динамические свойства модели также в значительной степени зависят от корней характеристического уравнения (8), которые будут определять вид переходного процесса.

6. Заключение

Предложенная динамическая модель рынка в виде системы автоматического управления может рассматриваться как возможный вариант, наряду с иными существующими. Достоинством её является наглядность процессов регулирования на базе сравнения спроса и предложения, возможность анализа свободного и регулируемого рынка, а также получения широкого спектра моделей: непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных, моделей с запаздыванием.

Частичный анализ линейной непрерывной модели позволяет сделать следующие выводы:

– при статическом регуляторе существует ошибка между спросом и предложением, величина которой зависит от величины ;

– в случае астатического регулятора при равновесной цене спрос равен предложению;

– наибольшую долю в ошибку вносит составляющая, обусловленная возмущением цены;

– система является устойчивой при порядке системы, не превышающем трёх.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
2. Теория автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. Ч. 1. М.: Высш. школа, 1986.

РЕЗЮМЕ

Предложена динамическая модель рынка в виде системы автоматического управления. Её достоинством является наглядность процессов регулирования на базе сравнения спроса и предложения, возможность анализа свободного и регулируемого рынка, а также получения широкого спектра его моделей.

SUMMARY

The dynamic model of market presented as the system of automated management has been suggested. The advantage of this model lies in clear presentation of processes regulation based on comparison of demand and offer, the possibility of analyzing free and regulated market as well as of getting a wide range of its models.