

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Г.А. Медведев

Обычно в качестве математических моделей изменения во времени процентных ставок на финансовом рынке используются диффузионные процессы, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Решения линейных стохастических уравнений, как правило, можно выписать в явной форме. Однако получение решений в явной форме для нелинейных уравнений – проблема более сложная. Вместе с тем для некоторых таких процессов могут быть найдены как маргинальные, так и совместные распределения вероятностей. Оказывается, что эти распределения относятся к классу смешанных распределений. Причем при фиксированных значениях смешивающей случайной величины отсчеты процесса независимо распределены. В статье изложены некоторые результаты по этой проблематике.

Будем рассматривать случайные процессы процентных ставок $r(t)$, которые допускают существование стационарного режима со стационарным математическим ожиданием $E[r(t)] = E$ и стационарной дисперсией $\text{Var}[r(t)] = V$. В классическом анализе обычно предполагалось, что процентная ставка доходности финансовых активов имеет нормальное распределение с однородными по времени независимыми приращениями и стационарными параметрами. Наиболее известной моделью динамики такой процентной ставки $r(t)$ является модель Васичека [5, 185] (нормальная модель), когда процесс $r(t)$ порождается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dr(t) = k(E - r(t))dt + \sqrt{2kV} dW(t).$$

Смысл параметра k разъясняется ниже, а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Однако выборочные характеристики временных рядов, соответствующих такой модели, оказываются часто несовместимыми с характеристиками процесса $r(t)$ этой модели. Одно из более важных отличий – то, что эмпирические распределения изменения процентной ставки часто слишком «островершинные», асимметричные и имеют тяжелые

правые хвосты, что не совместимо с нормальным распределением; наибольшие частоты наблюдаемых значений слишком велики, чтобы быть совместимыми с выборками из нормального распределения. Кроме того, рыночная процентная ставка обычно положительная, а нормальное распределение определено на всей числовой оси.

Устранить эти несоответствия пытались двумя различными способами. Первый хотя и предполагал независимые приращения и предположения стационарности, но заменял предположение о нормальности более общим предположением о распределениях, устойчивых в смысле Парето – Леви. Хотя негауссовы члены устойчивого семейства распределений часто аппроксимируют хвосты эмпирических распределений лучше, чем нормальное, эмпирическое подтверждение, пока еще слабое, чтобы обосновать принятие гипотезы устойчивости Парето относительно какого-либо островершинного распределения. Кроме того, свойство бесконечности дисперсии негауссовых устойчивых распределений подразумевает, что большинство наших статистических методов, которые основаны на предположениях о конечности моментов (например, метод наименьших квадратов), бесполезны. Гипотеза устойчивости Парето также подразумевает, что даже первый момент или математическое ожидание арифметического изменения цен не существуют. Отсутствие теории делает разработку требований к рассматриваемой модели при гипотезе устойчивости, по Парето, довольно трудной. Значительные теоретические и эмпирические трудности, связанные с гипотезой устойчивости Парето, побуждают рассматривать другие процессы с конечными моментами, чьи распределения не являются Гауссовыми. Кроме того, обширная математическая литература по распределениям этих процессов и свойствам конечности моментов делает реализацию проверки гипотез для таких процессов, значительно проще, чем для устойчивых процессов Парето – Леви.

Особенность стохастических моделей динамики процентных ставок состоит в том, что, кроме прочего, они должны порождать неотрицательные процессы. Модель Блэка – Карасинского [2, 56] (логарифмически нормальная модель), когда процентная ставка порождается диффузионным процессом

$$dr(t) = k r(t) \ln \left[E \sqrt{1 + V/E^2} / r(t) \right] dt + r(t) \sqrt{2k \ln(1 + V/E^2)} dW(t),$$

генерирует неотрицательный процесс с несколько более островершинной плотностью, чем нормальная. Однако правый хвост логарифмически нормальной плотности недостаточно тяжелый для описания реальных рыночных ставок (она чаще используется для описания процессов цен акций). К настоящему времени наиболее известными моделями процессов процентных ставок являются модели, построенные на основе случайных процессов Бесселя. Приведем две из них:

Модель Кокса – Ингерсолла – Росса (модель CIR [3, 391]):

$$dr(t) = k (E - r(t)) dt + \sqrt{2kVr(t)/E} dW(t); \quad (1)$$

Модель Ана – Гао (модель AG [1, 726]):

$$dr(t) = k (E + V/E - r(t)) r(t) dt + \sqrt{2kVr^3(t)/E} dW(t). \quad (2)$$

Здесь процесс $r(t)$ моделирует динамику процентной ставки; $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, а параметры уравнений (1) и (2) имеют следующий смысл: E – стационарное среднее, V – стационарная дисперсия процесса $r(t)$, а положительный параметр k определяет корреляционные свойства процесса $r(t)$ в обоих случаях таким образом, что коэффициент корреляции случайных величин $r(t)$ и $r(t + t)$ равен $\exp(-k |t|)$ для процесса, определяемого уравнением (1), и коэффициент корреляции случайных величин $1/r(t)$ и $1/r(t + t)$ для процесса, определяемого уравнением (2), равен $\exp[-k(E + V/E)t]$.

Введем обозначения:

$g(x|q, c) \in \frac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cx}$ – плотность вероятностей гамма-распределения с параметром формы q и параметром масштаба $c, x \geq 0$; если $X \sim g(x|q, c)$, тогда: $E[X] = q/c, \text{Var}[X] = q/c^2$;

$p(j|l) \in \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$ – пуассоновское распределение вероятностей с параметром $l, l > 0, j = 0, 1, 2, \dots$; если $J \sim p(j|l)$, тогда $E[J] = \text{Var}[J] = l$;

$b(j|q, b) \in \frac{\Gamma(q+j)}{j! \Gamma(q)} b^j (1-b)^q$ – отрица-

тельное биномиальное распределение вероятностей с параметрами $q > 0, b \in (0, 1), j = 0, 1, 2, \dots$; если $J \sim b(j|q, b)$, тогда $E[J] = qb/(1-b), \text{Var}[J] = qb/(1-b)^2$;

$h(x|q, c) \in \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{q+2}} e^{-c/x}$ – плотность ве-

роятностей для $x \geq 0$ с параметрами q, c такими, что при $X \sim h(x|q, c), E[X] = c/(q-1), \text{Var}[X] = c^2/(q-1)^2(q-2)$.

Ниже для краткости случайные величины и их возможные значения обозначаются одинаковыми символами.

Утверждение 1. Маргинальные плотности вероятностей процессов (1) и (2) определяются соответственно функциями $g(r|q, c)$ и $h(r|q, c)$, причем параметры этих плотностей вычисляются по формулам: $c = E/V, q = E^2/V$ – для процесса (1); $c = E(1 + E^2/V), q = 2 + E^2/V$ – для процесса (2).

Таким образом, модели (1) и (2) порождают процессы с неотрицательными значениями. Анализ показывает (см. ниже, а также рис. 1 и 2), что распределение процесса (2) обладает более тяжелым хвостом, чем распределение процесса (1). С практической точки зрения это более привлекательно, поскольку большинство стохастических моделей динамики финансовых показателей рынка обычно критикуют за то, что они имеют правые хвосты распределений, спадающие быстрее, чем хвосты оценок плотностей по реальным финансовым показателям.

На рисунке 3 показана сравнительная тяжесть правых хвостов (отношения плотностей вероятностей) для плотностей моделей Ана – Гао, Блэка – Карасинского и Кокса – Ингерсолла – Росса.

Сравнительный анализ плотностей $g(r)$ и $h(r)$ можно провести с помощью отношения этих плотностей для одинаковых стационарных математического ожидания E и дисперсии V :

$$\frac{h(r)}{g(r)} = \left(\frac{V + E^2}{r^2} \right)^{1+E^2/V} \exp \left[\frac{Er}{V} - \frac{E}{r} \left(1 + \frac{E^2}{V} \right) \right].$$

Это отношение является функцией со следующими особенностями:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r)}{g(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h(r)}{g(r)} = \infty,$$

имеется два экстремума: максимум – при

$$r_{\max} = E / \left[1 + 1/\sqrt{1 + E^2/V} \right] < E \text{ и минимум –}$$

при $r_{\min} = E/[1 - 1/\sqrt{1 + E^2/V}] > E$. Это означает, что на интервалах $(0, r_{\max})$ и (r_{\min}, Γ) функция возрастает, а на интервале (r_{\max}, r_{\min}) — убывает. Так что, у плотности $g(r)$ тяжелее левый хвост, а правый хвост тяжелее у плотности $h(r)$.

Кроме того, при $r = E$ имеем $h(E)/g(E) = (1 + V/E^2)^{1+E^2/V} / e$. Поэтому

$h(E)/g(E) \approx 1$ при $E^2/V \gg 1$ (что обычно выполняется на практике). Так что, функции $g(r)$ и $h(r)$ пересекаются в окрестности точки $r = E$. Иллюстрация функция $h(r)/g(r)$ представлена ниже на рисунке 4 для типичных рыночных значений среднего E годовой процентной ставки доходности и ее дисперсии V краткосрочных (один месяц) ценных бумагах Казначейства США (1991–1996 гг.).

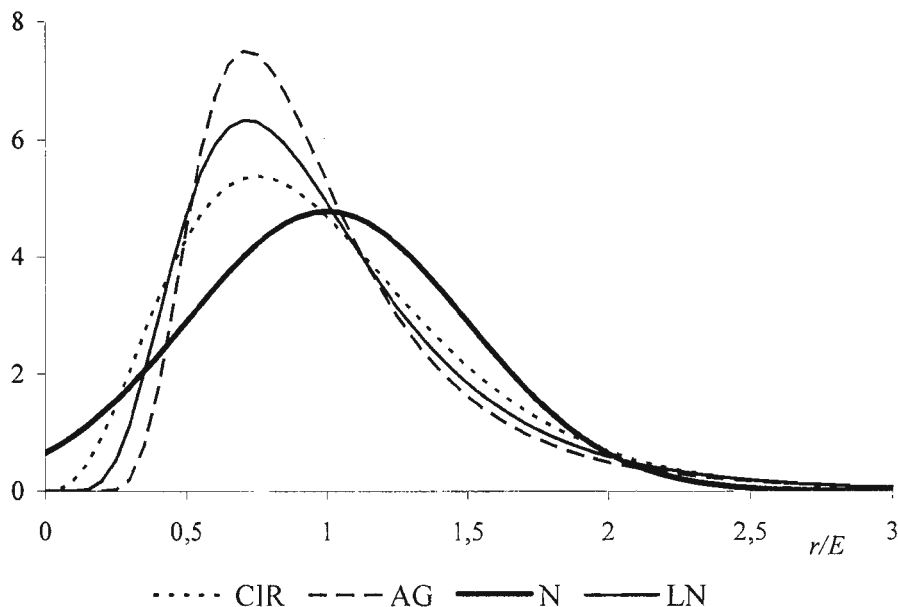


Рисунок 1 – Вид стационарных плотностей вероятностей для рассматриваемых моделей: Васичека (N), Блэка – Карасинского (LN), Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR) и Ана – Гао (AG) для $E^2/V = 4$.

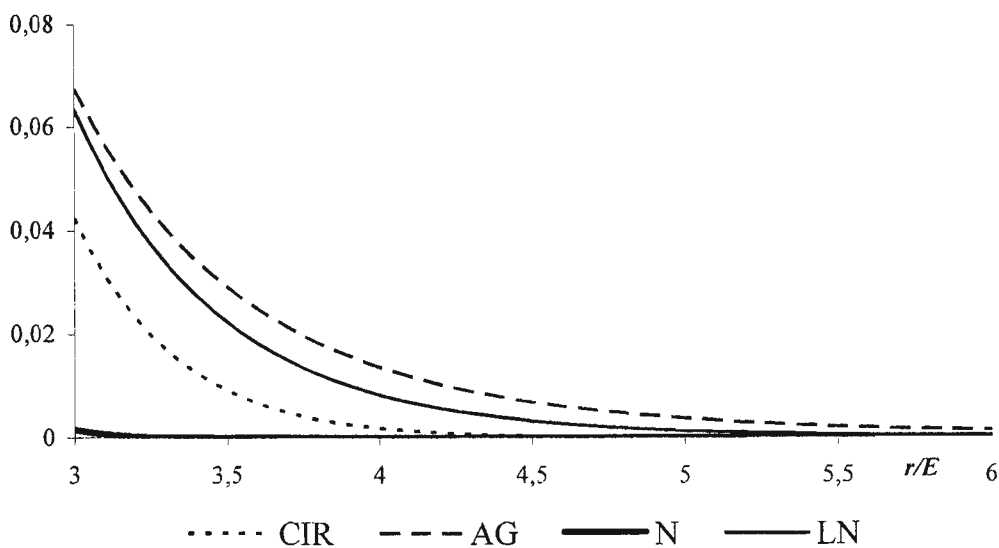


Рисунок 2 – Правые хвосты плотностей вероятностей, изображенных на рис. 1

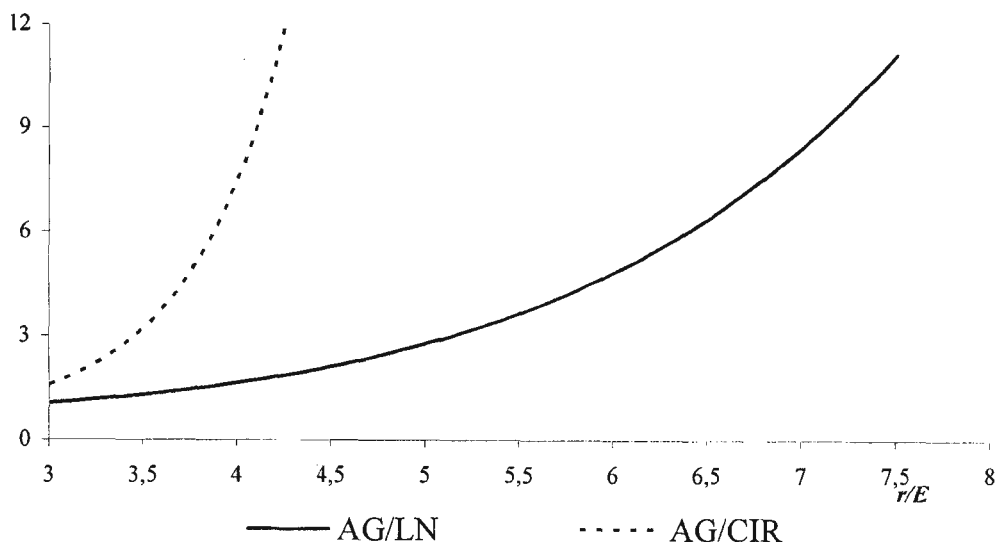


Рисунок 3 – Отношения плотностей вероятностей для моделей Ана – Гао (AG) и Блэка – Карасинского (LN), а также для моделей Ана – Гао (AG) и Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR)

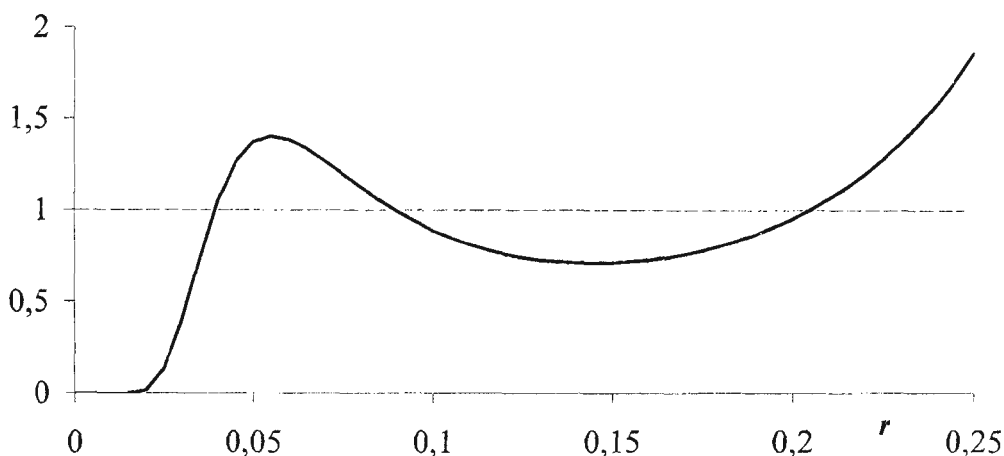


Рисунок 4 – Отношение $h(r)/g(r)$ плотностей вероятностей $h(r)$ и $g(r)$ как функция переменной r для $E = 0,08$ и $V = 0,0016$

Следствие. Начальные моменты стационарных распределений процессов (1) и (2) вычисляются по формулам

$$E[r^k] = \left(\frac{V}{E}\right)^k \frac{\Gamma(k + E^2/V)}{\Gamma(E^2/V)} \text{ - для про-}$$

цесса (1) и

$$E[r^k] = E^k \left(1 + \frac{E^2}{V}\right)^k \frac{\Gamma(2 - k + E^2/V)}{\Gamma(2 + E^2/V)}$$

для процесса (2).

Таким образом, для процесса (1) существуют моменты любого порядка. Однако для процесса (2) это не так: момент порядка k

существует только для $k < 2 + E^2/V$. Этого можно было ожидать, поскольку плотность вероятностей процесса (2) имеет тяжелый правый хвост. Заметим, что математическое ожидание и дисперсия процесса (2) существуют гарантированно. На практике обычно отношение E^2/V достаточно велико (в приведенном выше примере $E^2/V = 4$), так что, как правило, существуют как третьи, так и четвертые моменты распределения $h(r)$. В таблице 1 приведены данные, основанные на обработке реальных временных рядов, характеризующих поведение процентных ставок доходностей ценных бумаг Казначейства США.

Таблица 1 – Оценки стационарных средних и дисперсий, полученные на основе обработки реальных рыночных данных

Модель Кокса – Ингерсолла – Росса [6, 141]			
Источник данных	E	V	E^2/V
СКЛС (1992)	0,0808	0,00126	5,18
Sun (1992)	0,052	0,00034	7,95
Gibbons, Ramaswamy (1993), I	0,0154	0,00015	1,58
Gibbons, Ramaswamy (1993), II	0,0264	0,00027	2,58
Pearson, Sun (1994)	0,0311	0,00052	1,86
Art-Sahalia (1996)	0,0905	0,00166	4,93
Duffie, Singleton (1997), II	0,258	0,01552	4,29
Bali (1999)	0,0642	0,00071	5,81
Модель Васичека [6, 148]			
Источник данных	E	V	E^2/V
СКЛС (1992)	0,0866	0,001124	6,67
Art-Sahalia (1996)	0,0891	0,00127	6,25
Bali (1999)	0,0642	0,00068	6,06
Art-Sahalia (1999)	0,0717	0,000961	5,35
Модель Ана-Гао [1, 736]			
Источник данных	E	V	E^2/V
Ahn, Gao (1999), I	0,0671	0,00102	4,45
Ahn, Gao (1999), II	0,0686	0,000973	4,84

Из данных таблицы 1 видно, что, действительно, на практике обычно параметр $q = 2 + E^2/V > 4$, что обеспечивает существование первых четырех моментов случайной величины процентной ставки. Представляет интерес провести сравнительный анализ асимметрии

и эксцесса процессов, моделирующих динамику процентной ставки. В таблице 2 представлены выражения для асимметрии и эксцесса рассматриваемых распределений вероятностей. В этой таблице для краткости введены следующие обозначения: $a = E^2/V$, $\omega = 1 + 1/a$.

Таблица 2 – Асимметрия и эксцесс моделей процентных ставок

Распределение	Асимметрия	Эксцесс
Нормальное	0	3
Гамма (CIR)	$2/\sqrt{a}$	$3/(1+2/a)$
AG	$4\sqrt{a}/(a-1)$	$3(a^2 + 7a)/(a^2 - 3a + 2)$
Логнормальное (LN)	$(3+1/a)/\sqrt{a}$	$\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3$

На рисунках 5 и 6 представлены графики зависимости этих числовых характеристик плотностей от параметра a .

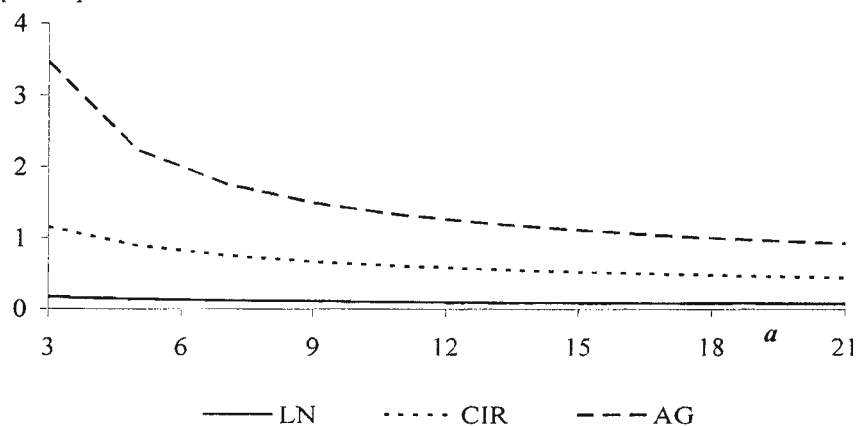


Рисунок 5 – Величина асимметрии как функция параметра a

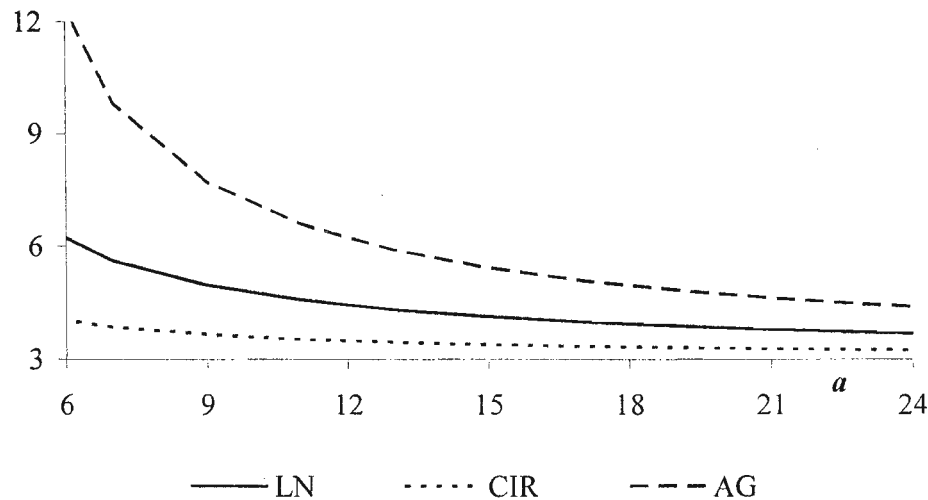


Рисунок 6 – Величина эксцесса как функция параметра a

Из приведенных данных таблицы и графиков становится ясным, что плотность вероятностей для модели Ана – Гао при одинаковых двух первых моментах обладает наибольшей асимметрией (приводящей к тому, что эта плотность имеет наиболее тяжелый правый хвост) и наибольшей островершинностью (эксцессом). Таким образом, эта модель оказывается наиболее подходящей для моделирования процессов изменения финансовых рыночных показателей.

Интересно, что с увеличением отношения $a = E^2/V$ плотности вероятностей моделей Ана – Гао, Блэка – Карасинского и Кокса – Ингерсолла – Росса сходятся к нормальной плотности, т.е. указанные модели с увеличением E^2/V приближаются к модели Васичека. Вместе с тем сама нормальная плотность вероятностей с увеличением отношения $a = E^2/V$ сводится к дельта функции.

Утверждение 2. Условные плотности вероятностей $f(r, t | R, s)$, где обозначено $r = r(t)$, $R = r(s)$, $s < t$, определяются в виде смеси распределений:

$$f(r, t | R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{c^{q+j} r^{q+j-1}}{\Gamma(q+j)} e^{-cr} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) g(r | q+j, c), \quad r \geq 0, \quad (3)$$

где:

$$u = \frac{\rho ER}{V(1-\rho)}, \quad c = \frac{E}{V(1-\rho)}, \quad q = \frac{E^2}{V}, \quad \rho = e^{-k(t-s)}$$

для процесса (1) и

$$f(r, t | R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{c^{q+j+1} r^{-q-j-2}}{\Gamma(q+j+1)} e^{-c/r} =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) h(r | q+j, c), \quad r \geq 0, \quad (4)$$

где: $u = \frac{\rho E(1+E^2/V)}{R(1-\rho)}, \quad c = \frac{E(1+E^2/V)}{(1-\rho)},$

$$q = 1 + \frac{E^2}{V}, \quad \rho = e^{-k(E+V/E)(t-s)}$$

для процесса (2).

Доказательство утверждений 1 и 2 основывается на результатах Феллера [4, 180], который рассмотрел проблему решения уравнений Колмогорова для плотности вероятностей диффузионного процесса (1), а также получил и исследовал характеристическую функцию этого процесса. В частности, он показал, что достаточным условием строгой положительности процесса (1) (иначе говоря, нулевой уровень процесса $r(t)$ недостижим сверху с вероятностью единицы) является неравенство $E^2/V > 1$. Очевидно, что это тем более справедливо для процесса (2).

Вид плотностей (3) и (4) можно прокомментировать следующим образом. Получается, что случайная величина $r(t)$ при фиксированном $r(s) = R$ с пуассоновскими вероятностями $p(j|u)$ имеет соответствующую плотность вероятностей с параметром $q+j$. Причем пуассоновский параметр u зависит от фиксированного значения $r(s) = R$. Иначе говоря, плотности $f(r, t | R, s)$ – это смеси, в которых смешивающая случайная величина – пуассоновская.

Утверждение 3. Совместные плотности вероятностей $f(r, t; R, s)$, для $r = r(t)$, $R = r(s)$, $s < t$, определяются в виде смеси распределений

$$f(r, t; R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q, \rho) g(r|q+j, c) g(R|q+j, c) \quad (5)$$

– для процесса (1) и

$$f(r, t; R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q, \rho) h(r|q+j, c) h(R|q+j, c) \quad (6)$$

– для процесса (2). Значения параметров q, c, ρ в формулах (5) и (6) определены так же, как в утверждении 2.

Таким образом, совместные плотности являются смешанными, как и условные плотности, только смешивающая случайная величина здесь имеет отрицательное биномиальное распределение. Кроме того, особенностью плотностей (5) и (6) является то, что при фиксированном значении смешивающей случайной величины J , выборочные значения процесса $r(t)$ и $r(s)$ в различные моменты времени оказываются независимыми, поскольку для всякого фиксированного значения $J=j$ совместная плотность выражается в виде произведения плотностей. Так что, в некотором смысле смешивающая случайная величина «регулирует» зависимость между выборочными значениями процесса. Такая структура плотностей вероятностей удобна при аналитических расчетах, касающихся вычисления математических ожиданий от различных функций случайных процессов (1) и (2).

Поскольку процессы (1) и (2) являются Марковскими, с использованием утверждений 1 – 3 для обоих процессов (1) и (2) можно последовательно получать совместные плотности большей размерности так, как это сделано ранее для модели CIR [7, 126].

Для моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ обозначим $r(t_i) \equiv r_i, i = 1, 2, 3, 4$, а также

$$\rho_{ij} = e^{-k(E+V/E)(t_i-t_j)}, c_{ij} \equiv c_0/(1-\rho_{ij}), i > j;$$

$u_i \equiv c_0 \rho_{i+1,i} r_i / (1-\rho_{i+1,i}), i = 1, 2, 3$. Заметим, что при этих обозначениях для всяких $j > i > l$

имеет место равенство $\rho_j \rho_{ij} = \rho_{jl}$.

Утверждение 4. Трехмерная плотность вероятностей $f(r_1, r_2, r_3)$ значений процесса (2) имеет представление для $r_i \geq 0, i = 1, 2, 3$:

$$f(r_1, r_2, r_3) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b(j, k|q, \alpha, \beta) h(r_1|q+j, c_{21}) \times h(r_2|q+j+k, c_{21}+c_{32}-c_0) h(r_3|q+k, c_{32}), \quad (7)$$

где $b(j, k|q, \alpha, \beta) =$

$$\frac{\Gamma(j+k+q)}{j! k! \Gamma(q)} \alpha^j \beta^k (1-\alpha-\beta)^q$$

– двумерное отрицательное биномиальное распределение,

$$0 < \alpha = \frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{21}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} < 1,$$

$$0 < \beta = \frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{32}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} < 1.$$

Таким образом, из представления (7) видно, что совместная плотность трех значений $r(t_1), r(t_2), r(t_3)$ случайного процесса (2) является смесью плотностей, причем смешивающих случайных величин здесь уже две J и K , и они подчиняются двумерному отрицательному биномиальному распределению вероятностей с параметрами, зависящими только от коэффициентов корреляции ρ_{ij} .

Следствие. Смешивающими случайными величинами трехмерной совместной плотности вероятностей значений процесса (2) являются случайные величины J и K , имеющие двумерное отрицательное биномиальное распределение вероятностей

$$\frac{\Gamma(j+k+q)}{j! k! \Gamma(q)} \alpha^j \beta^k (1-\alpha-\beta)^q, \quad (8)$$

$$0 \leq j \leq \infty, 0 \leq k \leq \infty$$

с параметрами

$$0 \leq \alpha = \frac{\rho_{21}(1-\rho_{32})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{21}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} \leq 1,$$

$$0 \leq \beta = \frac{\rho_{32}(1-\rho_{21})}{1-\rho_{32}\rho_{21}} = \frac{\rho_{32}-\rho_{31}}{1-\rho_{31}} \leq 1,$$

которые зависят только от корреляционных свойств случайного процесса (2).

Непосредственные вычисления показывают, что смешивающие случайные величины J и K имеют следующие первые и вторые моменты:

$$E[J] = \frac{q\rho_{21}}{1-\rho_{21}}, E[K] = \frac{q\rho_{32}}{1-\rho_{32}},$$

$$\text{Var}[J] = \frac{q\rho_{21}}{(1-\rho_{21})^2}, \text{Var}[K] = \frac{q\rho_{32}}{(1-\rho_{32})^2},$$

$$\text{Cov}[J, K] = \frac{q\rho_{32}\rho_{21}}{(1-\rho_{21})(1-\rho_{32})},$$

$$\text{Corr}[J, K] = \sqrt{\rho_{32}\rho_{21}} = \sqrt{\rho_{31}}.$$

Здесь через $\text{Corr}[J, K]$ обозначен коэффициент корреляции случайных величин J и K .

Как уже было сказано, величина $\rho_{ii} = e^{-k(E+V/E)(t_i-t_j)}$ определяет коэффициент корреляции случайных величин $1/r(t_j)$ и $1/r(t_i)$, $t_j < t_i$, для процесса, определяемого уравнением (2). Полезнее знать коэффициент корреляции случайных величин $r(t_j)$ и $r(t_i)$. Вычислим его.

Используя формулу (6) для совместной плотности вероятностей случайных величин $r(t_j)$ и $r(t_i)$, находим, что

$$E[r(t_j)r(t_i)] = \frac{c_0^2}{(q-1)(q-2)} \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q-2, \rho_{ii}) \frac{q+j-2}{q+j-1},$$

$$E[r(t_j)] = E[r(t_i)] = \frac{c_0}{q-1},$$

$$\text{Var}[r(t_j)] = \text{Var}[r(t_i)] = \frac{c_0^2}{(q-1)^2(q-2)}.$$

Так что коэффициент корреляции $\tilde{\rho}_{ii}$ случайных величин $r(t_j)$ и $r(t_i)$ определяется по формуле

$$\text{Corr}[r(t_j)r(t_i)] \equiv \tilde{\rho}_{ii} = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q-2, \rho_{ii}) \frac{j}{q+j-1}.$$

К сожалению, полученный ряд не суммируется в аналитическом виде. Однако характер изменения $\tilde{\rho}_{ii}$ в зависимости от значений параметров можно легко установить. Коэффициент корреляции $\tilde{\rho}_{ii}$ всегда положительный и зависит от трех величин: $(t_i - t_j)$, kE и $a = E^2/V$, т.е. $\tilde{\rho}_{ii} = \tilde{\rho}_{ii}(t_i - t_j, kE, a)$. С увеличением параметров $(t_i - t_j)$ и kE от нуля до ∞ величина $\tilde{\rho}_{ii}$ монотонно уменьшается от 1 до 0. С увеличением параметра a от 2 (наименьшее возможное значение) до ∞ величина $\tilde{\rho}_{ii}$ монотонно увеличивается от нуля до значения $e^{-kE(t_i-t_j)}$. На рисунке 7 эти свойства иллюстрируются графически.

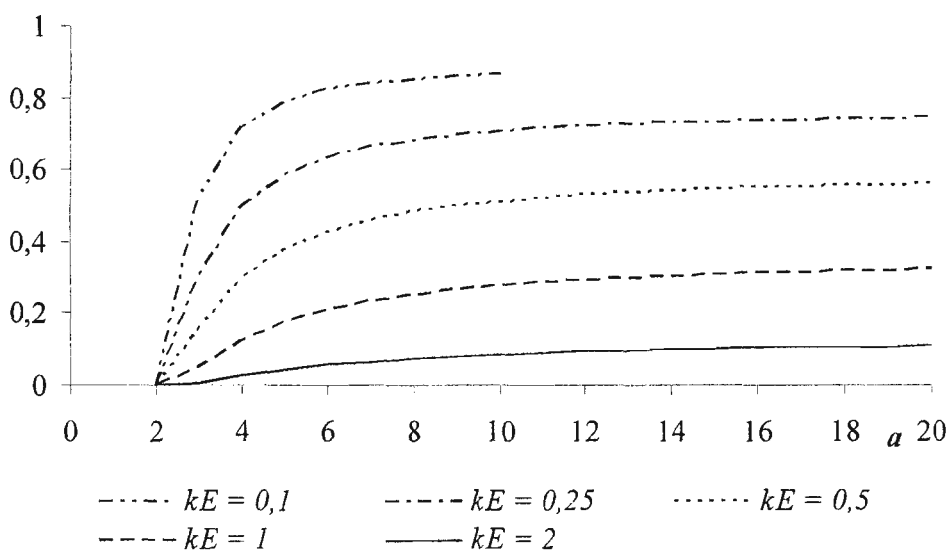


Рисунок 7 – Характер зависимости коэффициента корреляции от параметров kE и a при $t_i - t_j = 1$

Таким образом, в результате сравнительного анализа стохастических нелинейных моделей динамики процентных ставок Блэка – Карасинского, Кокса – Ингерсолла – Росса и Ана – Гао выяснено, что наиболее подходящей для моделирования процессов изменения финансовых рыночных показателей является модель Ана – Гао, которая имеет наибольшую асимметрию (что обеспечивает тяжелый правый хвост плотности вероятностей) и наибольшую острровершинность (эксцесс),

которые характерны для эмпирических временных рядов наблюдений реальных рыночных процентных ставок доходности. Найдены совместные плотности вероятностей для модели Ана – Гао в форме смеси маргинальных плотностей со смешивающими целочисленными случайными величинами, имеющими отрицательное биномиальное распределение. Найдены формулы для моментов случайного процесса Ана – Гао и выяснены его корреляционные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahn, D.-H.* A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics / D.-H. Ahn, B. Gao // *The Review of Financial Studies*. – 1999. – Vol. 12. – № 4. – P. 721–762.
2. *Black, F.* Bond and Options Pricing When Short Rates are Lognormal / F. Black, P. Karasinski // *Financial Analysts Journal*. – 1991. – Vol. 47. – P. 52–59.
3. *Cox, J.C.* A Theory of the Term Structure of Interest Rate / J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross // *Econometrica*. – 1985. – Vol. 53. – P. 385–467.
4. *Feller, W.* Two singular diffusion problems / W. Feller // *Annals of Mathematics*. – 1951. – Vol. 54. – № 1. – P. 173–182.
5. *Vasinek, O.* An Equilibrium Characterization of the Term Structure / O. Vasinek // *Journal of Financial Economics*. – 1977. – Vol. 5. – P. 177–188.
6. *Медведев, Г.А.* Стохастические процессы финансовой математики / Г.А. Медведев. – Минск: БГУ, 2005.
7. *Медведев, Г.А.* О вероятностных свойствах случайных процессов Кокса – Ингерсолла – Росса / Г.А. Медведев // *Вестник Томского государственного университета*. – 2006. – Приложение № 16. – С. 125–129.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрены современные математические модели динамики процентных ставок доходности – основного финансового рыночного показателя. Уравнения динамики выражаются через легко понимаемые параметры – стационарное среднее и дисперсию процентной ставки. Получены выражения для плотностей вероятностей процессов процентных ставок. Изучены корреляционные свойства процессов процентных ставок. На основе сравнительного анализа показано, что модель Ана – Гао является наиболее подходящей для практического применения.

* Статья поступила в редакцию 8 января 2008 г.