МОДЕЛЬ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ

С.В. Рогозин, И.А. Карачун

Введение

В настоящее время финансовая математика переживает период интенсивного развития, особенно область, связанная с использованием стохастического анализа. В последнем случае речь идет о применении методов общей теории случайных процессов и дифференциальных уравнений, которые лучше всего подходят для адекватного описания эволюции основных (акций и облигаций) и производных (форвардов, фьючерсов, опционов и др.) ценных бумаг [1]. В 1973 г. Ф. Блек и М. Шоулз получили дифференциальное уравнение для цены финансовой производной (европейского опциона), зависящей от цены акции, по которой не выплачиваются дивиденды – модель формирования цен на опционы Блека-Шоулза (BSOPM) [2]. Курс базовой акции в этой модели описывается геометрическим броуновским движением, а следовательно, является мартингалом, что позволяет использовать стохастический анализ при решении уравнения модели. Первое математическое описание стохастического процесса, который теперь называется винеровским, или процессом броуновского движения, дал Л. Башелье в докладе, представленном им Парижской академии в 1900 г. Он предложил модель для нахождения стоимости различных типов опционов, основанную на использовании этого процесса.

Основной смысл рассуждений, которые использовали авторы, заключается в том, что из двух финансовых контрактов (финансовой производной и акции) составляется безрисковый портфель. Затем доход портфеля приравнивается к доходу, получаемому от такой же по величине инвестиции по безрисковой ставке. Когда такой портфель составлен, прибыль (или потери) акции компенсируется потерями (или прибылью) финансовой производной так, что полная стоимость портфеля в конце короткого периода времени достоверно известна. Следовательно, инвесторы могут дублировать поток платежей (прибыли) по опциону, управляя портфелем, который содержит только акцию и облигацию.

В настоящий момент наиболее актуален более глубокий анализ модели Блека-Шоулза на основе современных результатов теории стохастических дифференциальных уравнений, а также исследования возможности модификации и обобщения модели в свете современных достижений теории и практики финансового анализа.

Постановка задачи

В настоящей работе проводится анализ модели Блека-Шоулза на основе использования стоха-стического исчисления Ито, теоремы Гирсанова о существовании эквивалентной мартингальной меры, теоремы о представлении мартингала в виде винеровского интеграла.

Рассмотрим основные компоненты модели Блека-Шоулза.

Модель Блека-Шоулза оперирует двумя активами – рисковым (акцией стоимостью S_t в момент времени t) и безрисковым (будем рассматривать банковский вклад на сумму S_t^o), которые образуют портфель инвестора.

Рассмотрим применение случайных процессов для описания динамики цен в модели непрерывного времени.

Поведение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$dS_t^o = rS_t^o dt, \tag{1}$$

где: r – текущая процентная ставка по банковскому вкладу.

Пусть , тогда

$$S_t^o = e^{rt},\ t \ge 0. \tag{2}$$

Курс акции определяется следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \tag{3}$$

где: μ и σ – постоянные, B_t – стандартный винеровский процесс. Модель рассматривается на интервале $[0,T]$, где T – время исполнения опциона.

Динамика банковского счета описывается положительной стохастической последовательностью, где при каждом $t \ge 1$ величины S_t^0 являются F_{t-1}-измеримыми. Динамика рискового актива S_t описывается также положительной стохастической последовательностью, где при каждом $t \ge 0$ величины S_t являются F_t-измеримыми.

F_{t-1}-измеримость S_t^0 означает, что сумма банковского счета в момент времени t полностью становится известной (по получении всей информации) уже в момент времени $t-1$. В этом смысле значение S_t^0 является предсказуемым.

Совсем иная ситуация с курсом акции: F_t-измеримость величины S_t означает, что ее значение становится известным только по получении всей информации F_t в момент времени t.

Уравнение (3) имеет решение

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right\}, \qquad (4)$$

где: S_0 – спот-цена в момент времени $t = 0$. Стоит отметить, что процесс S_t – решение уравнения вида (3) возможен тогда и только тогда, когда процесс $\ln(S_t)$ – винеровский.

Данное решение (4) является, вообще говоря, не полностью определенным, так как значения параметров μ и σ в (4) не определены и, кроме того, в формуле (4) присутствует случайный процесс B_t.

Целью работы является математический и экономический анализ модели Блека-Шоулза, а именно: получение представления стохастических процессов, описывающих стоимость колл- и пут-опционов соответственно. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения, которые приведены в следующем разделе.

Некоторые основные понятия и факты финансовой математики и теории случайных процессов

Акции – это ценные бумаги, выпускаемые корпорациями, которые передают определенные права их владельцам. Основным является право акционера претендовать на доходы корпорации.

Опционом называется контракт, заключенный между двумя лицами, в соответствии с которым одно лицо предоставляет другому право купить определенный актив по определенной цене в рамках определенного периода времени (*колл-опцион*) или предоставляет право продать определенный актив по определенной цене в рамках определенного периода времени (*пут-опцион*). Лицо, которое получило опцион и таким образом приняло решение, называется *покупателем опциона*, который должен платить за это право. Лицо, продавшее опцион и отвечающее на решение покупателя, называется *продавцом опциона*. В таком контракте обязательно оговариваются:

1. Актив, т.е. компания, акции которой могут быть куплены.
2. Количество приобретаемых акций.
3. Цена приобретения акций – *страйк*.
4. Дата, после которой право купить утрачивается, именуемая *экспирацией*.

Европейский опцион определяется некоторой неотрицательной F_t-измеримой случайной величиной $f(S_t)$ ($f(S_t) = (S_t - K)^+$ – для колл-опциона, $f(S_t) = (K - S_t)^+$ – для пут-опциона; K – цена исполнения).

Рассмотрим основные понятия теории случайных процессов.

Определение 1. *Полное вероятностное пространство* (Ω, F, P), *наделенное неубывающим семейством* σ*-алгебр* $\mathbb{F} = (F_t)_{t\ge 0}$, $F_s \subseteq F_t \subseteq F$, $s \le t$ *удовлетворяющих условиям:*

а) непрерывности справа ($F_t = F_{t+}$, *где* $F_{t+} = \bigcap\limits_{u>0} F_u$, $t \ge 0$ *)*;

б) пополненности (σ*-алгебра* F_0 *пополнена множествами P-нулевой вероятности из F),*

называется стохастическим базисом и обозначается $(\Omega, F, \mathbb{F}, P)$.

Семейство $\mathbb{F}$ часто называется потоком σ-алгебр или *фильтрацией*.

Пусть $X = (X_t)_{t\ge 0}$ – случайный процесс, т. е., последовательность случайных величин $X_t = X_t(\omega)$, заданных на $(\Omega, F, \mathbb{F}, P)$. Если при каждом $t \ge 0$ случайные величины X_t являются F_t- измеримыми, то говорят, что процесс X является $\mathbb{F}$- согласованным или $\mathbb{F}$- адаптированным (относительно семейства $\mathbb{F}$). Иногда такой процесс называют *стохастической последовательностью*.

Если стохастическая последовательность X такова, что для каждого $t \ge 1$ величины X_t являются F_{t-1}-измеримыми, считая $F_{-1} = F_0$, то ее называют *предсказуемой последовательностью*.

Случайный процесс B_t, $t \ge 0$ называют *стандартным винеровским процессом* (броуновским движением), выходящим из 0, если выполнены три условия:

1) $B_0 = 0$;

2) для любого $N > 1$ и $t_k \in T$, $k = \overline{1,N}$: $0 < t_1 < \ldots < t_N$ случайные величины $B_1, B_2 - B_1, \ldots$ $B_N - B_{N-1}$ являются независимыми;

3) для любого $s < t$, $s,t \in T$ случайная величина $B_t - B_s$ распределена по нормальному закону с параметрами 0 и $t - s$.

Определение 2. *Пусть* $(\Omega, F, \mathbb{F}, P)$ *– стохастический базис с заданной фильтрацией* $\mathbb{F}$. *Стохастическая последовательность* $X=(X_t, F_t)$ *называется мартингалом относительно фильтрации* $\mathbb{F}$, *если:*

а) для любых $t \in T$ *выполняется* $M|X_t|<\infty$;

б) для любых $s,t \in T$, $s \le t$ *справедливо соотношение* $X_s = M(X_t \mid F_s)$, *понимаемое в смысле P - п.н.*

Условное математическое ожидание относительно F_s – F_s-измеримая случайная величина (по определению), для которой выполнено определенное интегральное соотношение. Поэтому с учетом *а)* условие *б)* можно переписать так:

$$\int_A X_s dP = \int_A X_t dP, \quad \forall s,t \in T, \ s \le t, \ A \in F_s.$$

Стандартный винеровский процесс B_t, $t \ge 0$, выходящий из 0, является мартингалом относительно семейства порожденных им σ- алгебр $F_{\le t} = F_{B_s, s \le t}$.

Теорема 1. *(см. [3]) Пусть* $(X_t)_{0 \le t \le T}$ *– квадратично-суммируемый мартингал относительно фильтрации* $\mathbb{F} := (F_t)_{0 \le t \le T}$. *Тогда существует адаптированный процесс* $(H_t)_{0 \le t \le T}$ *такой, что* $M(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty$ *и для любого* $t \in [0,T]$ *справедливо представление*

$$X_t = X_o + \int_0^t H_s dB_s, \ P\text{-п.н.}$$

Сформулируем основные понятия финансовой математики в терминах соответствующих элементов теории случайных процессов.

Определение 3. *Стохастическая (предсказуемая) последовательность* $\varphi = (\varphi_t)_{0 \le t \le T} = (H_t^o, H_t)$, H_t^o *и* H_t *являются* F_{t-1}*- измеримыми,* $F_{-1} = F_0$, *называется портфелем ценных бумаг. Компоненты* H_t^o, H_t *– сумма на банковском счете и количество акций в портфеле в момент времени t соответственно.*

Желая подчеркнуть эволюцию портфеля ценных бумаг во времени, вместо термина «портфель» часто говорят о стратегии инвестора.

Величины H_t^o и H_t могут принимать не только положительные и нулевые значения, но и отрицательные, что означает взятие в долг с банковского счета и возможность «короткой продажи» акции.

Определение 4. *Портфель называется самофинансируемым, если изменение его стоимости за счет изменения состава банковского счета может осуществляться лишь за счет изменений в составе пакета акций, что равносильно следующему равенству:*

$$\Delta H_t^o S_{t-1}^o + \Delta H_t S_{t-1} = 0, \ t \ge 1.$$

Это означает, что изменение стоимости такого портфеля может осуществляться только за счет изменений в рыночных стоимостях (ценах) активов без какого-либо «оттока или притока» капитала извне.

Определение 5. *Портфель* $\varphi = (H_t^o, H_t)_{0 \le t \le T}$ *называется допустимым, если он самофинансируемый и его дисконтированная стоимость* $\tilde{V}_t(\varphi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$ *для любого t неотрицательна,* $\sup_{t \in [0,T]} \tilde{V}_t$ *квадратично-суммируема относительно* P^*.

Определение 6. *Опцион называется реплицируемым, если его выплата в дату погашения равна конечной стоимости допустимого портфеля. При этом соответствующий портфель называется реплицирующим.*

Понятно, что для опциона, определенного $f(S_t)$, чтобы быть реплицируемым, необходимо, чтобы $f(S_t)$ была квадратично-суммируема по некоторой мартингальной мере P^*. В случае колл-опциона это свойство действительно выполняется, так как $M^*(S_T^2) < \infty$, а в случае с пут-опционом $f(S_t)$ даже ограничена.

Анализ обобщенной модели Блека–Шоулза на основе мартингального подхода

Оценим рассматриваемый опцион, воспользовавшись некоторыми математическими инструментами для нахождения портфеля.

Стоимость самофинансируемого портфеля в момент времени *t* задается формулой (см., например, [3]):

$$V_t(\varphi) = H_t^o S_t^o + H_t S_t.$$

В следующий текущий момент происходят два события: стоимость портфеля изменяется, поскольку изменяются цены активов, и портфель корректируется в соответствии с торговой стратегией инвестора. Если затраты на корректировку уравновешиваются прибылью или убытками портфеля, то не требуется дополнительных финансовых вливаний извне (самофинансируемый портфель).

Следовательно, стоимость самофинансируемого портфеля характеризуется стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dV_t(\varphi) = H_t^o dS_t^o + H_t dS_t.$$

Воспользовавшись теоремой Гирсанова [4], можно доказать, что существует вероятностная мера, эквивалентная G, относительно которой дисконтированная цена акции $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ является мартингалом. Действительно, из стохастического дифференциального уравнения, которому удовлетворяет S_t, получим:

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t)$$

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dw_t \quad , \qquad (5)$$

где $w_t = B_t + (\mu - r)\dfrac{t}{\sigma}$ – стандартный винеровский процесс, а следовательно, мартингал относительно P^*. Тогда относительно вероятности P^* из равенства (3) получаем, что $\tilde{S}_t$ – мартингал и $\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 e^{\sigma w_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}$.

Теорема 2. *(см. [3, стр. 68] В модели Блека–Шоулза любой опцион, определенный некоторой неотрицательной F_t-измеримой случайной величиной $f(S_t)$, которая квадратично-суммируема по P^*, является реплицируемым, и стоимость в момент времени t любого реплицирующего портфеля равна:*

$$V_t = M^*(e^{-r(T-t)} f(S_t) \mid F_t)).$$

Следовательно, для $f(S_T)$ стоимость реплицируемого опциона V_t в момент времени t можно записать как функцию от t и S_T:

$$V_t = M^*(e^{-r(T-t)} f(S_T) \mid F_t) =$$

$$= M^*(e^{-r(T-t)} f(S_T e^{r(T-t)} e^{\sigma(w_T - w_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}) \mid F_t).$$

Случайная величина S_T F_t- измерима по P^*, $w_T - w_t$ не зависит от F_t. Получаем $V_t = \Phi(t, S_t)$ – теоретическая «справедливая» премия по опциону:

$$\Phi(t,x) = M^*(e^{-r(T-t)} f(xe^{r(T-t)} e^{\sigma(w_T - w_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})), \qquad (6)$$

где: S_t – текущая цена базовых акций,

K – цена исполнения опциона,

θ – время, остающееся до срока истечения опциона, выраженное как доля года (количество дней до даты истечения /365 дней),

r – процентная ставка по безрисковым активам,

σ – годовое стандартное отклонение цены базовых акций (историческая волатильность). Рассчитывается путем умножения стандартного отклонения цены за несколько дней на квадратный корень из 260 (количество торговых дней в году).

Лемма 1. *В условиях **Теоремы 2** процесс $\Phi(t,x)$ в случае колл-опциона имеет представление*

$$\Phi(t,x) = \int_{-\infty}^{d_2} (xe^{-\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy, \qquad (7)$$

где $d_1 = \dfrac{\ln(\frac{x}{K}) + \theta(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\theta}}$ и $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$.

◁ Так как по P^* $w_T - w_t$ – нормально распределенная случайная величина с коэффициентом диффузии $T - t$ (см., например, [5]), то:

$$\Phi(t,x) = M^*(e^{-r(T-t)} f(x) \mid F_t) =$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y\sqrt{T-t}}) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy.$$

Для колл-опциона из (6) получаем:

$$\Phi(t,x) = M^*(e^{-r(T-t)}(xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(w_T - w_t)} - K)^+) =$$

$$= M(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g - \sigma^2\frac{\theta}{2}} - Ke^{-r\theta})^+,$$

где g – стандартная Гауссова случайная величина и $\theta = T - t$.

Пусть $d_1 = \dfrac{\ln(\frac{x}{K}) + \theta(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\theta}}$ и

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$. Тогда:

$$\Phi(t,x) = M((xe^{\sigma\sqrt{\theta}g - \frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}) I_{\{g + d_2 \geq 0\}}) =$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty} (xe^{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{d_2} (xe^{-\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy. \triangleright$$

Записывая формулу (7) как разность двух интегралов и используя в первом замену переменной $z = y + \sigma\sqrt{\theta}$, получим формулу Блека-Шоулза для колл-опциона:

$$\Phi_{call}(t,S_t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2)\ , \qquad (8)$$

где $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – кумулятивное стандартное нормальное распределение.

Замечание 1. *Формула Блека-Шоулза для пут-опциона получается аналогично:*

$$\Phi_{put}(t,S_t) = Ke^{-r\theta}N(-d_2) - S_t N(-d_1). \qquad (9)$$

Заключение

В 1973 г. была опубликована работа Фишера Блека и Майрона Шоулза, где предлагалась формула для оценки финансовой производной (европейского опциона), зависящей от цены акции, по которой не выплачиваются дивиденды. Эта формула оценивает «справедливую стоимость» опциона, учитывая прошедшую историю акции (актива).

Опубликование работы Блека–Шоулза позволило отойти от субъективно-интуитивных оценок при определении цены опционов и подвести под него теоретическую базу, применимую и к другим производным инструментам. Для начала 70-х гг. сама идея использовать математический подход для оценки производных инструментов была революционной.

Формула Блека–Шоулза не только заработала, она привела к трансформации всего рынка. Дело в том, что она очень удобна при использовании на практике, так как зависит только от двух параметров, определить которые не составляет труда: безрисковой процентной ставки и дисперсии нормы дохода по акциям за предшествующий период (не менее шести месяцев). Когда в 1973 г. открылась Чикагская биржа опционов, в первый день ее работы торговалось менее 1000 опционов, а уже к 1995 г. объем ежедневной торговли превысил 1 миллион опционов.

Однако строгого математического обоснования столь важного результата не существовало. Вывод формулы был основан на решении дифференциального уравнения с определенными граничными условиями, но само уравнение строилось интуитивно. Строгое математическое доказательство формулы можно получить с помощью мартингального подхода к этой модели, который заключается в следующем: курс базовой акции описывается геометрическим броуновским движением, а следовательно, является мартингалом, что позволяет использовать стохастический анализ при решении уравнения модели. Вычисляя будущие значения цены акции и назначая им вероятности, модель позволяет включить эти вероятности в цену опциона. Используя стохастическое исчисление Ито, теорему Гирсанова о существовании эквивалентной мартигальной меры, теорему о представлении мартингала в виде винеровского интеграла, можно вывести формулу оценки опциона, не прибегая к решению дифференциального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baxter M., Rennie A.* Financial Calculus. Cambridge University Press, 1996.
2. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities. // J. Political Economy. 1973. № 81. P. 637-659.
3. *Lamberton D., Lapeyre B.* Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall/CRC, 1998.
4. *Гирсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятностей и её применения. М., 1960. Т.5. С. 314-330.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения: В 2 т. М.: Мир, 1967. Т.2.

РЕЗЮМЕ

В статье проводится анализ модели Блека–Шоулза на основе современных результатов теории стохастических дифференциальных уравнений, в частности – мартингального подхода. Исследуются возможности модификации и обобщения модели в свете современных достижений теории и практики финансового анализа.

SUMMARY

The article contains analysis of the Black-Scholes model based on the up-to-date results of the theory of stochastic differential equations – the martingal approach, in particular. The author investigates the possibility of modification and generalization of the model in the light of the modern achievements in the theory and practice of financial analysis.